3/9/2007

LOGICA —— PREDICATI "è un numero primo" caratteristica attributo

PROPOSIZIONE —— COMPOSTE scomponibili "oggi è lunedì e è appena passato Natale"

$\wedge$ connettivo → uniscono proposizioni

P $\mathcal{A}$

ELEMENTARI non scomponibili

	$\mathcal{A}$ e B	$\mathcal{A}$	B
VERA 1/4	V	V	V
	F	V	F
	F	F	V
	F	F	F

$x+y=7$ infinite coppie xy

$x-y=2$ " "

} → condizioni che devono essere tutte verificate

	$\mathcal{A}$ o B	$\mathcal{A}$	B
FALSA 1/4	V	V	V
	V	V	F
	V	F	V
	F	F	F

"e" "o" → connettivi binari

La negazione è un connettivo unario perché agisce su una sola

$\mathcal{A}$	non $\mathcal{A}$ ($\bar{\mathcal{A}}$, $\neg\mathcal{A}$)
V	F
F	V

$\mathcal{A}$	B	se $\mathcal{A}$ allora B ($\mathcal{A} \Rightarrow B$)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

da una verità non può uscire una falsità

$\mathcal{A}$	B	se e solo se $\mathcal{A}$ allora B ($\mathcal{A} \Leftrightarrow B$)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Due tipi di frasi: quelle che alla fine risultano vere sia che le proposizioni che le compongono siano vere o false.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	o	(non $\mathcal{A}$)
V	V	$\boxed{V}$	F
F	F	$\boxed{V}$	V

Queste proposizioni si chiamano TAUTOLOGIE o LEGGI LOGICHE

1

Se il risultato è sempre falso, una proposizione si chiama CONTRADDIZIONE.

A	A	e	(non A)
V	V	F	F
F	F	F	V

A	B	(A e B)	⟶	[non A)
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

valore di verità

A	B	C	[(A → B)	e	(B → C)]	→	(A → C)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

tautologia

A	B	[(non A)	o	B]	⟺	(A ⇒ B)
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V

LEGGI DI DE MORGAN

A B	non	(A o B)	⟺	(non A)	e	(non B)
V V	F	V	V	F	F	F
V F	F	V	V	F	F	V
F V	F	V	V	V	F	F
F F	V	F	V	V	V	V

A	B	non	(A e B)	⟺ (non A)	o	(non B)
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

$$8 \cdot (a + b) = 8 \cdot a + 8 \cdot b$$

DISTRIBUTIVA DELLA POTENZA RISPETTO AL PRODOTTO

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

A e (B o C) ⟺ (A e B) o (A e C)	A	B	C
	V	V	V
	V	V	

A	B	C	A e (B o C) $\Longleftrightarrow$ (A e B) o (A e C)						
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F

PREDICATI

x è un numero primo. $\rightarrow$ non è una proposizione perché non so se è vera o falsa.
predicato e
forma proposizionale

Per farla diventare una proposizione si sceglie un insieme di valori di x.

$A = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ $P(x)$= "x è un n° primo" poi si specifica a quanti elementi ci si riferisce (tutte, almeno uno, uno e uno solo)

"per tutte le $x \in A$, vale $P(x)$" è falsa perché 8 non è un n° primo

"c'è almeno un $x \in A$: vale $P(x)$" è vero (almeno può essere sottinteso)

"c'è uno e un solo $x \in A$: vale $P(x)$" è falsa perché ce ne sono 4.

Questi trasformano un predicato in proposizione. I simboli sono:

"$\forall x \in A, P(x)$" ; "$\exists x \in A ; P(x)$" ; "$\exists ! x \in A : P(x)$"

$\forall$, $\exists$ e $\exists!$ sono QUANTIFICATORI
universale esistenziale

$P(x)$: l'alunno x del corso 3 sarà promosso $\forall x, P(x)$ se non è vero

$$\text{non}\left(\forall x, P(x)\right) \Longleftrightarrow \exists x : \text{non}\left(P(x)\right)$$

$$\exists! \overset{\text{diventa}}{\Longrightarrow} \left(\exists x : P(x)\right) \text{ e } \left(x \text{ è unico}\right)$$ per negarla $$\text{non}\left[\left(\exists x : P(x)\right) \text{ e } \left(x \text{ è unico}\right)\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\text{non}\left[\exists x : P(x)\right]\right\} \text{ o } \left[x \text{ non unico}\right] \Longleftrightarrow \left(\forall x, \text{non}\left(P(x)\right)\right) \text{ o } \left(x \text{ non è unico}\right)$$

2

$A = \{x : \text{capoluoghi di provincia di E.R.}\}$

$B = \{y : y \text{ è un giorno della scorsa settimana}\}$

$P(x,y) =$ "il giorno y pioveva a x" due variabili $\rightarrow$ quantifico sia la x che la y

$\forall x, \exists y : P(x,y) \rightarrow$ in tutti i capoluoghi c'è stato almeno un giorno in cui ha piovuto

$\forall x, \forall y, P(x,y) \rightarrow$ in tutti i capoluoghi ha sempre piovuto

$\exists y : \forall x, P(x,y) \rightarrow$ c'è almeno un giorno della settimana in cui ha piovuto ovunque

$\forall y, \forall x, P(x,y) \rightarrow$ in ogni giorno ha piovuto ovunque

Se i quantificatori sono uguali, l'ordine non è importante.

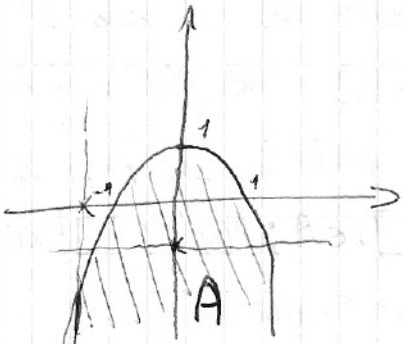
$\exists x > 2 : \forall y \geq 1,\ y^2 - y + 3 \geq x$ trasformarla in modo esteso

$\exists x : \{(x > 2 \text{ e } y \geq 1) \Rightarrow y^2 - y + 3 \geq x\}$

$A = \{(x,y) \in \underset{\substack{\downarrow \\ \text{piano cartesiano}}}{\mathbb{R}^2} : x^2 < 1 - y\}$ ① $\forall x, \exists y : (x,y) \in A$ sono vere?
② $\exists y : \forall x, (x,y) \in A$

$x^2 < 1 - y \quad y < -x^2 + 1 \quad y = -x^2 + 1$

$-x^2 + 1 = 0$
$x = \pm 1$



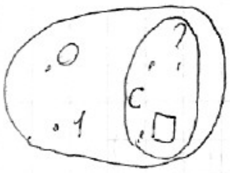
$\mathbb{N} \rightarrow$ interi positivi
$\mathbb{Z} \rightarrow$ interi relativi
$\mathbb{Q} \rightarrow$ numeri razionali, scrivibili sotto forma di frazione
$\mathbb{R} \rightarrow$ razionali e irrazionali
$\mathbb{C} \rightarrow$ complessi

① è vera perché preso un x a caso, esiste una y tale che $y < -x^2 + 1$, dato che la parabola esiste in tutto $\mathbb{R}$.

② è falsa perché fissando una y, trovo al massimo due valori di x che verificano una condizione.

INSIEMI

Rappresentati da diagrammi di Eulero-Venn. $A = \{0, 1, \square, ?\}$



L'ordine non è importante. Ogni elemento lo scrivo una volta sola.

$B = \{$"lettere che compaiono in "mamma"$\} = \{m, a\}$

$1 \in A \rightarrow$ 1 appartiene ad A

$2 \notin A \rightarrow$ 2 non appartiene ad A

$C = \{\square, ?\}$ $\quad \underset{\text{contenuto}}{C \subset A}$

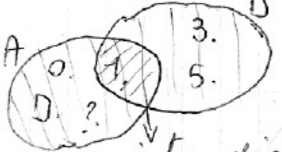
C è formato dagli elementi contenuti anche in A (anche non tutti)

$C = \{x : x \in A\}$ $\quad C = \{x : x \in C \Rightarrow x \in A\}$ $\quad$ C è sottoinsieme di A

$C \subset A \Rightarrow$ C è contenuto propriamente in A

$C \subseteq A \Rightarrow$ C è contenuto in A, ma può anche essere uguale ad A

$D = \{1, 3, 5\}$



intersezione

$A \cap D = \{x : x \in A \text{ e } x \in D\} = \{1\}$

$\underset{\text{UNIONE}}{A \cup D} = \{x : x \in A \text{ o } x \in D\} = \{0, 1, \square, ?, 3, 5\}$

A e B ha la stessa tabella di verità di B e A

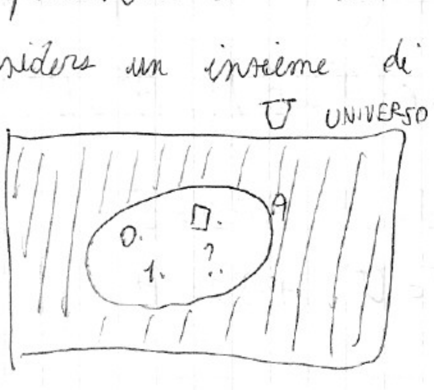
A o B ha la stessa tabella di verità di B o A

= significa che gli insiemi hanno gli stessi elementi $\quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

$X = Y \Rightarrow X \subset Y$ e $Y \subset X$

Il complementare di un insieme è ciò che sta fuori dall'insieme. $\complement A \quad \bar{A} \quad A^c$

Si considera un insieme di riferimento. $\quad A^c = \{x : x \in U \underset{\text{e}}{,} x \notin A\}$



PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELL'$\cap$ RISPETTO ALL'UNIONE

A e $(B$ o $C) \Leftrightarrow (A$ e $B)$ o $(A$ e $C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

③

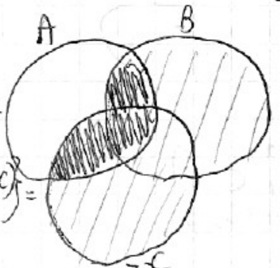
$A = \{x \in N ; 3 \le x < 10\}$ $\quad B = \{x \in N ; x \le 6\}$ $\quad C = \{x \in N ; 5 \le x \le 12\}$

$A = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ $\quad B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\quad C = \{5,6,7,8,9,10,11,12\}$

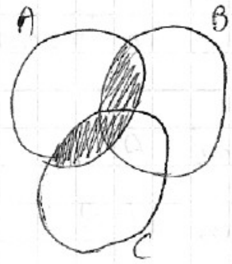
$B \cup C = \{0,1,2,\dots,12\}$ $\quad A \cap (B \cup C) = A$ perché $A \subset (B \cup C)$

$A \cap B = \{3,4,5,6\}$ $\quad A \cap C = \{5,6,7,8,9\}$ $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3,4,\dots,9\} = A$

$A \cap (B \cup C) =$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



$= \{x : x \in A \text{ e } x \in (B \cup C)\} =$

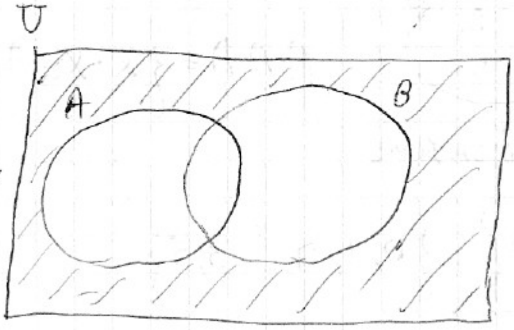
$= \{x : x \in A \text{ e } [x \in B \text{ o } x \in C]\} =$

$= \{x : (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ e } x \in C)\} = \{x : [x \in (A \cap B)] \text{ o } [x \in (A \cap C)]\} =$

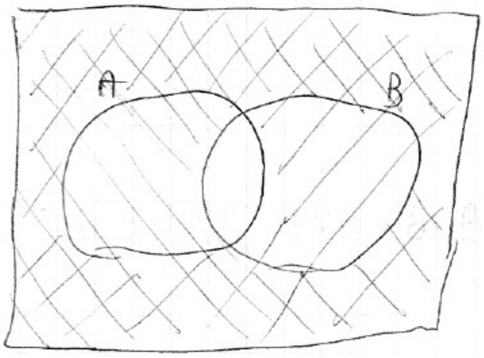
$= \{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\}$

DE MORGAN

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



$A^c \cap B^c =$ #



$(A \cup B)^c = \{x : \text{non } [x \in (A \cup B)]\} = \{x : \text{non } [x \in A \text{ o } x \in B]\} =$

$= \{x : (\text{non } x \in A) \text{ e } (\text{non } x \in B)\} = \{x : x \notin A \text{ e } x \notin B\} =$

$= \{x : x \in A^c \text{ e } x \in B^c\} = \{x : x \in (A^c \cap B^c)\} = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = \{x : \text{non } [x \in (A \cap B)]\} = \{x : \text{non } [x \in A \text{ e } x \in B]\} = \{x : (\text{non } x \in A) \text{ o } (\text{non } x \in B)\} =$

$= \{x : x \notin A \text{ o } x \notin B\} = \{x : x \in A^c \text{ o } x \in B^c\} = \{x : x \in (A^c \cup B^c)\} = A^c \cup B^c$

Se $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, $A \cap B =$ vuoto $\emptyset$ $\quad A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U$ $\quad A \cap U = A$

L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme.

$A = \{1,2,x\}$ $A_1 = \{1\}$ $A_2 = \{2\}$ $A_3 = \{x\}$ $A_4 = \{1,2\}$ $A_5 = \{1,x\}$ $A_6 = \{2,x\}$

$A_7 = \{1,2,x\}$ $A_8 = \emptyset$ A_7 e A_8 sono sottoinsiemi IMPROPRI

$\{x\} \to 2$ sottoinsiemi $= 2^1$ Con 5 elementi, posso fare $2^5 = 32$ sottoinsiemi

$\{x,y\} \to 4$ sottoinsiemi $= 2^2$

L'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A si chiama INSIEME DELLE PARTI DI A $\mathcal{P}_{(A)}$

INTERVALLI $\to$ sottoinsiemi di R scritti nelle forme $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$

$\{x \in R : x \geq a\}$ $\{x \in R : x \leq b\}$

PRODOTTO CARTESIANO

$A \times B \to$ A cartesiano B =

= forma un insieme i cui elementi sono coppie ordinate $(a,b) \neq (b,a)$

$\{a,b\} = \{b,a\}$

$A \times B = \{(a,b) : \forall a \in A, \forall b \in B\}$

$A = \{x,y\}$ $B = \{!,?\}$ $A \times B = \{(x,!);(x,?);(y,!);(y,?)\}$

$B \times A = \{(!,x);(!,y);(?,x);(?,y)\}$

Si può rappresentare con due semirette

$A \times B$

Non esiste un orientamento

$A \times A = \{(x,x);(x,y);(y,x);(y,y)\} = A^2$

$R \times R = R^2$ il piano cartesiano è l'insieme di tutti i punti formati dalle coppie (x,y) con $x \in R$ e $y \in R$. Per questo usiamo due rette, non semirette.

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: permette di mantenere l'ordine dei numeri ma di spostare le parentesi e cambiare la precedenza.

$(A \text{ e } B) \text{ e } C \iff A \text{ e } (B \text{ e } C)$

$(A \cup B) \cup C \iff A \cup (B \cup C)$

4

$A \setminus B = A \cap B^c = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

DOMINIO DI $y = \frac{3}{x+1}$ È $x \neq -1$, oppure

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

a) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } (x < 0)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x > 2) \text{ e } [(x < 6) \text{ o } (x > 0)]\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } (x \leq 2)\} = \{x \in \mathbb{R} : (x < 0) \text{ o } [(x < 1) \text{ e } (x \geq -3)]\}$

a)

FALSO

b)

VERO

2ª LEZIONE

ESERCIZI

A	B	$A \Rightarrow B$	non A	$\Rightarrow$	non B	non B	$\Rightarrow$	non A
V	V	V	F	$\boxed{V}$	F	F	$\boxed{V}$	F
V	F	F	F	$\boxed{V}$	V	V	$\boxed{F}$	F
F	V	V	V	$\boxed{F}$	F	F	$\boxed{V}$	V
F	F	V	V	$\boxed{V}$	V	V	$\boxed{V}$	V

La negazione dell'implica, comporta il capovolgimento delle freccia

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B)$	e	$(B \Rightarrow A)$
V	V	V	V	$\boxed{V}$	V
V	F	F	F	$\boxed{F}$	V
F	V	F	V	$\boxed{F}$	F
F	F	V	V	$\boxed{V}$	V

Il se e solo se si può dividere in $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$

A	non (non A)	
V	$\boxed{V}$	F
F	$\boxed{F}$	V

A	B	$A \Rightarrow B$	(non A) o B		
V	V	V	F	$\boxed{V}$	V
V	F	F	F	$\boxed{F}$	F
F	V	V	V	$\boxed{V}$	V
F	F	V	V	$\boxed{V}$	F

non $(A \Rightarrow B)$ è equivalente A e (non B)

non [non $(A \Rightarrow B)$] è equivalente non [A e (non B)]

$A \Rightarrow B$ è equivalente non A o B

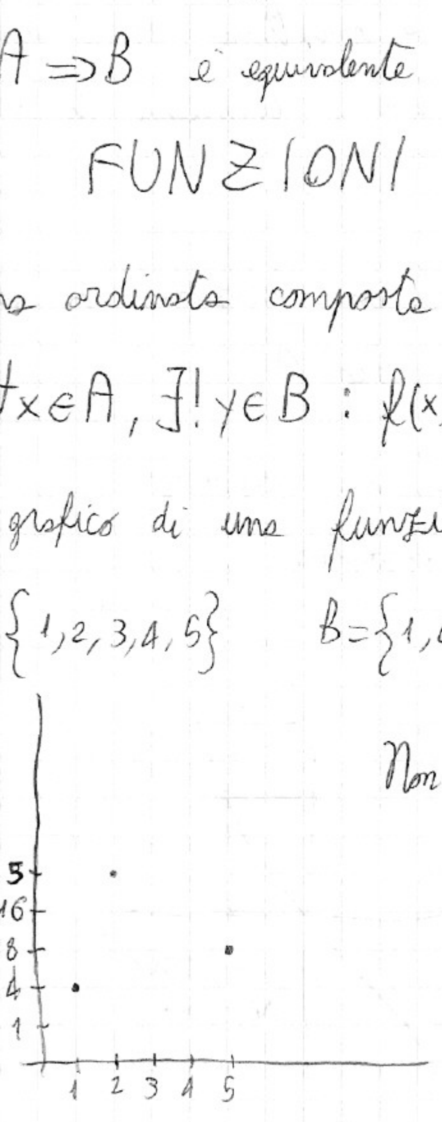
FUNZIONI

Terna ordinata composta da due insiemi e una legge (A, B, f)

$\forall x \in A, \exists! y \in B : f(x) = y$

Il grafico di una funzione $G \subset A \times B$; $G = \{(x,y); x \in A, y \in B : y = f(x)\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{1, 4, 8, 16, 5\}$ $\quad y = x + 3$



Non è una funzione, quindi considero $A' = \{1, 2, 5\}$

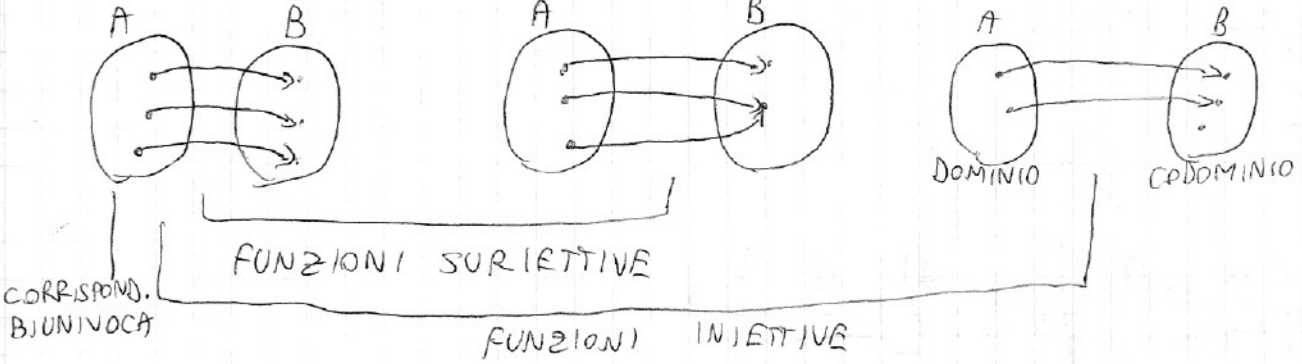
$G \subset A' \times B$

Di solito $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si può anche scrivere $f(x) = x + 3$ $\quad f : x \longmapsto x + 3$

5

y è immagine di x ; x è controimmagine di y



Se f è suriettiva, $\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$ tutti gli elementi di B ~~hanno~~ hanno immagine in A

Se f è iniettiva, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \; \forall x_1, x_2 \in A$ ovvero
$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

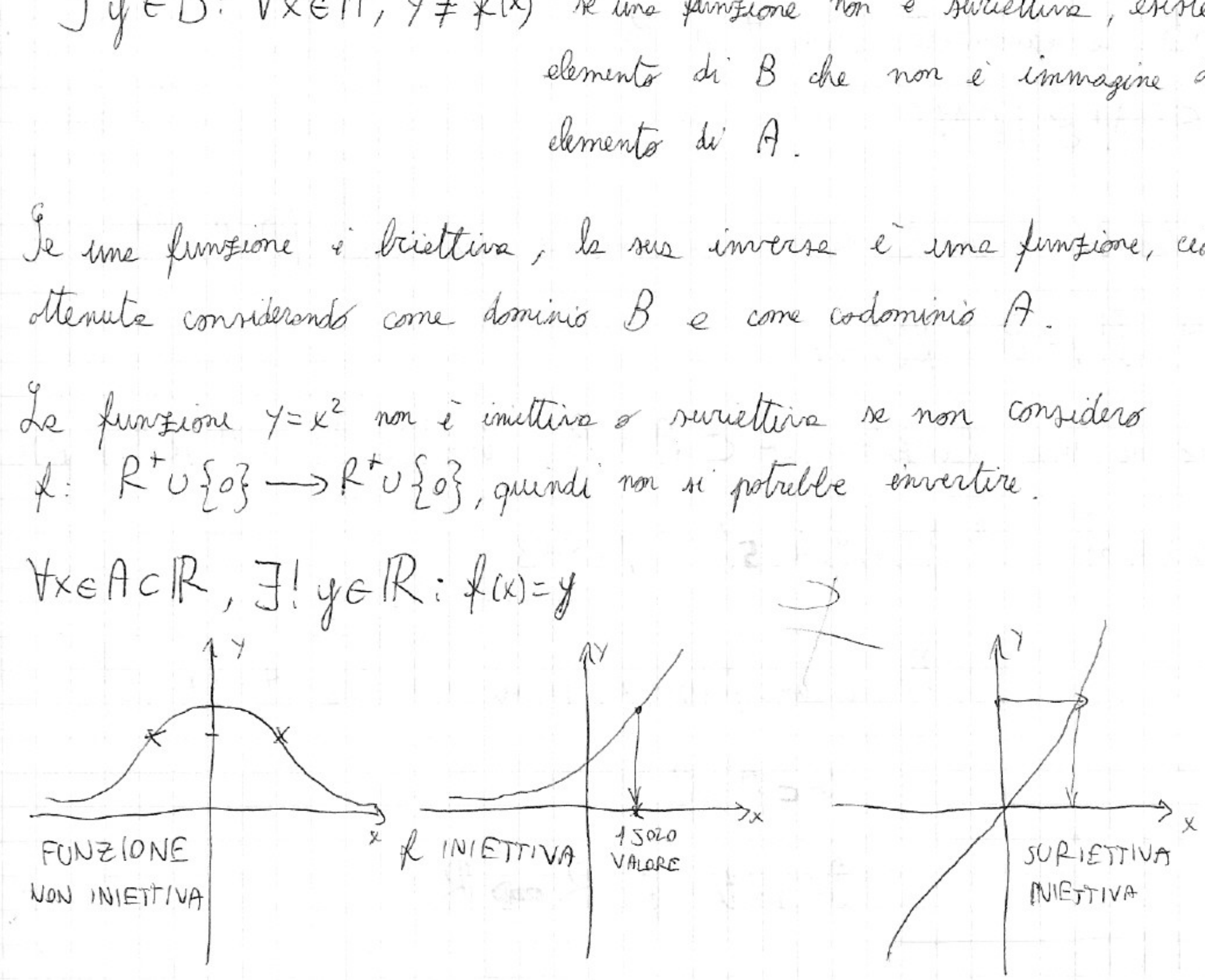
Negare la definizione di f suriettiva: non $\left[\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)\right]$ si scambiano i quantificatori

$\exists y \in B : \forall x \in A, \; y \neq f(x)$ se una funzione non è suriettiva, esiste almeno un elemento di B che non è immagine di nessun elemento di A.

Se una funzione è biettiva, la sua inversa è una funzione, cioè quella ottenuta considerando come dominio B e come codominio A.

La funzione $y = x^2$ non è iniettiva o suriettiva se non considero
$f : R^+ \cup \{0\} \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$, quindi non si potrebbe invertire.

$\forall x \in A \subset \mathbb{R}, \exists! \, y \in \mathbb{R} : f(x) = y$



$f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+1}$ $\quad f(3) = \dfrac{10}{7}$ $\quad f(-2) = \dfrac{5}{-3}$

$f^{-1}(1) \neq \dfrac{1}{f(1)}$ devo trovare la controimmagine di 1

$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \emptyset$

$D: x \neq -\frac{1}{2} \quad \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\dfrac{x^2+1}{2x+1} = 1 \quad x^2+1 = 2x+1 \quad x(x-2) = 0 \quad x=0 \text{ o } x=2 \quad \{0, 2\}$

$\dfrac{x^2+1}{2x+1} = -\dfrac{1}{2} \quad x^2+1 = \dfrac{-2x-1}{2} \quad 2x^2+2 = -2x-1 \quad 2x^2+2x+3=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-6}}{2} = \emptyset$

$f(x) = x^2+1$

1) verificare che è una funzione: x^2 e 1 sono funzioni, quindi è una funzione
2) trovare $f([1,2])$ intervallo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
3) trovare $f^{-1}([2,5])$

$-3 > -5 \qquad 1 < 2$

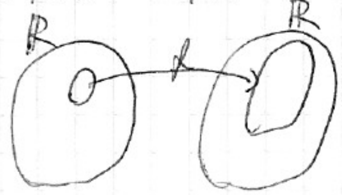
QUADRATO $\quad 9 < 25 \qquad 1 < 4$ UGUALE

$\bar{a} < b^{+} \qquad a^2 \,?\, b^2$

② $1 \leq x \leq 2 \longrightarrow f(x)$? elevo al quadrato

$1 \leq x^2 \leq 4$ aggiungo 1

$1+1 \leq x^2+1 \leq 4+1 \quad 2 \leq f(x) \leq 5$ immagine, ma non so se coprono tutto l'insieme

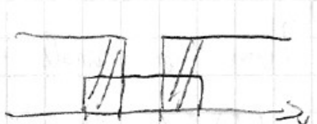


$b = f(x) \quad 2 \leq b \leq 5 \quad \forall b \in [2,5], \overset{???}{\exists} x \in [1,2] : f(x) = b$

Se sì, l'intervallo è coperto completamente $\quad 2 \leq 1+x^2 \leq 5 \quad 2-1 \leq x^2 \leq 5-1 \quad 1 \leq x^2 \leq 4$

Sì l'immagine $f([1,2])$ è $[2,5]$

$x^2 \geq 1$ e $x^2 \leq 4$



③ TROVA X VIA ANALITICA

$2 \leq f(x) \leq 5$ risolgo alla x

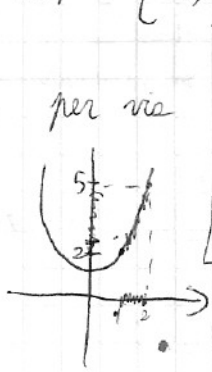
$2-1 \leq x^2+1-1 \leq 5-1$ se le immagini stanno tra 2 e 5, le x

$1 \leq x^2 \leq 4 \quad [-2,-1] \cup [1,2]$ stanno

non ci interessa $\quad [-2,-1] \cup [1,2]$ C.V.D.

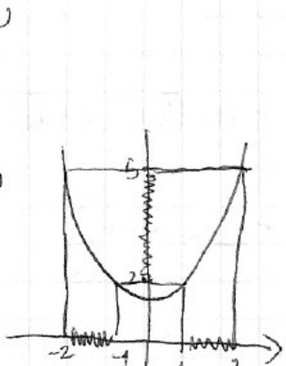
Se non per via analitica

②



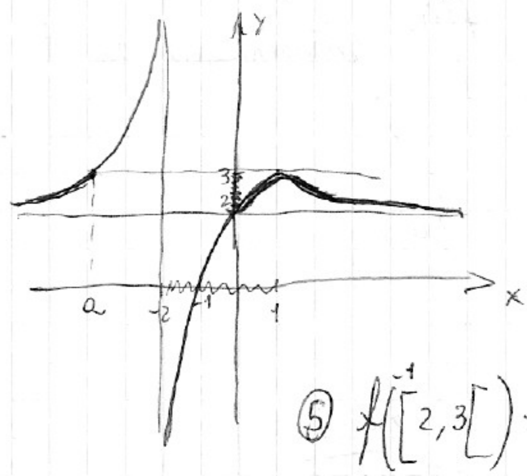
$[2,5]$

③



⑥

Se non so la funzione, ma ho il grafico...



① È iniettiva: no perché tra $[2,3]$ ci sono 3 x

② È suriettiva: sì perché tutte le y sono coperte

③ Trovare $f([-2,1]) =]-\infty, 3]$

④ Trovare $f^{-1}([2,3]) =]-\infty, a] \cup [0,+\infty[$

⑤ $f^{-1}([2,3[) =]-\infty, a[\cup [0,1[\cup]1,+\infty[$

⑥ $f^{-1}([3,+\infty[) = [a,-2[\cup \{1\}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

① Trovare dominio

② Trovare $f([-1,1])$

③ Trovare $f^{-1}([1,4])$

D: R < si controlla che tutta la funzione sia definita per tutto R (≤ 0 e >0)

se so eseguire i calcoli (se fosse $\frac{1}{x-3}$ se $x>0$, per $x=3$ non so fare i calcoli).

② $[-1,1] = [-1,0] \cup]0,1]$ $\quad f([-1,1]) = f([-1,0]) \cup f(]0,1])$

$f([-1,0])$ $\quad -1 \leq x \leq 0$ elevo al quadrato e cambio verso $1 \geq x^2 \geq 0$ $\quad f(x) \in [0,1]$

$0 \leq f(x) \leq 1 \quad 0 \leq x^2 \leq 1$

$[-1,0] \cup [0,1]$

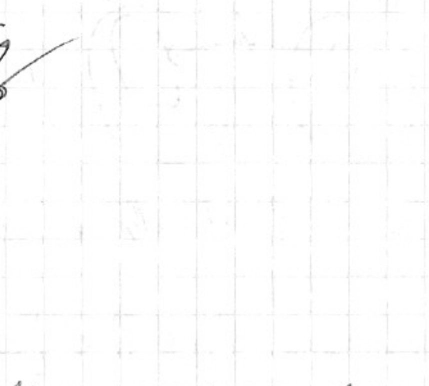
$f([-1,1]) = [0,1] \cup]0,1] = [0,1]$

③ Non so quale tratto scegliere

$1 \leq f(x) \leq 4 \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 1 \leq x^2 \leq 4 \end{cases} \rightarrow [-2,-1] \cup \cancel{[1,2]}$ Faccio l'altro caso, dopo il viceversa

$-2 \leq x \leq -1 \quad 4 \geq x^2 \geq 1$

$\begin{cases} x > 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \xrightarrow{x \in} [1,4]$ $\quad f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,4]$



$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$ è iniettiva analiticamente

se $f(x_1) = f(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$ $\quad x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} \quad \frac{x_1^2+1}{x_1} = \frac{x_2^2+1}{x_2}$ $\quad x_1$ e $x_2 \neq 0$

$x_1^2 x_2 + x_2 = x_1 x_2^2 + x_1 \quad x_1^2 x_2 + x_2 - x_1 x_2^2 - x_1 = 0 \quad x_1 x_2 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2) = 0$

$(x_1-x_2)(x_1x_2-1)=0$ $\quad x_1-x_2=0$ o $x_1x_2-1=0$ $\quad x_1=x_2$, $\; x_1=\frac{1}{x_2}$ $\quad$ non è iniettiva

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}: x\to x-\frac{1}{x}$ $\quad f(x_1)=f(x_2)\overset{?}{\Rightarrow} x_1=x_2$ $\quad x_1-\frac{1}{x_1}=x_2-\frac{1}{x_2}$ $\quad$ NON IN.

$\frac{x_1^2-1}{x_1}=\frac{x_2^2-1}{x_2}$ $\quad x_1^2x_2-x_2=x_2^2x_1-x_1$ $\quad x_1^2x_2-x_2-x_2^2x_1+x_1=0$

$x_1x_2(x_1-x_2)+1(x_1-x_2)=0$ $\quad (x_1x_2+1)(x_1-x_2)=0$ $\quad \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1x_2=-1 \quad x_1=-\frac{1}{x_2} \end{cases}$ $\quad$ NON IN. per.

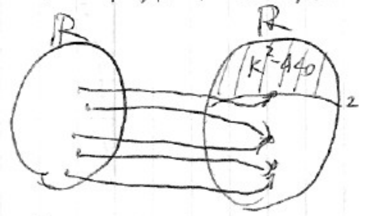
$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ $\quad x\to x-\frac{1}{x}$ $\quad f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$x_1-\frac{1}{x_1}=x_2-\frac{1}{x_2}$ $\quad \frac{x_1^2-1}{x_1}=\frac{x_2^2-1}{x_2}$ $\quad (x_1x_2+1)(x_1-x_2)=0$ $\quad \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1=-\frac{1}{x_2} \end{cases}$

ALTRO MODO

IN?) $\forall k\in\mathbb{R}$ l'eq. $f(x)=k$ può avere 0 sol. oppure 1 sola sol.

$x+\frac{1}{x}=k$ $\quad x^2-kx+1=0$ $\quad x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}=$ $\begin{cases} k^2-4>0 & 2 \text{ sol.} \\ k^2-4=0 & 1 \text{ sol.} \quad x=\frac{k}{2} \\ k^2-4<0 & 0 \text{ sol.} \end{cases}$



NO INIETT.

SUR?) $\forall k\in\mathbb{R}, \exists x: f(x)=k$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^3-2$ $\quad$ ① iniettiva ② suriettiva ③ se biettiva, funzione inversa

$k\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)=k$ $\quad x^3-2=k$ $\quad x^3-k-2=0$ $\quad x^3=k+2$ $\quad x=\sqrt[3]{k+2}$ $\quad \forall k\; \exists!$ sol. $\quad$ è suriettiva, è iniettiva, è biettiva

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$ $\quad$ funzione inversa

$$\left[\left(\frac{11}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)^{-3}\right]^{-2}:\left(-\frac{11}{2}\right)^{-1}:\left(-7^{2}\right):\left(7^{-3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^4\cdot\left[\left(-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{4}{7^2}\right]=$$

$$=\left[\left(-\frac{11}{2}\right)^2\right]^{-2}\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7^2}\right):\left(\frac{1}{7^3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^4\cdot\left[\left(-\frac{1}{7}\right)^2+4\cdot\frac{1}{7^2}\right]=$$

$$=\left(-\frac{11}{2}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left[\frac{1}{7^2}+\frac{4}{7^2}\right]=\left(-\frac{11}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left[\frac{5}{7^2}\right]=\left(-\frac{2}{11}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{7^2}\right)=$$

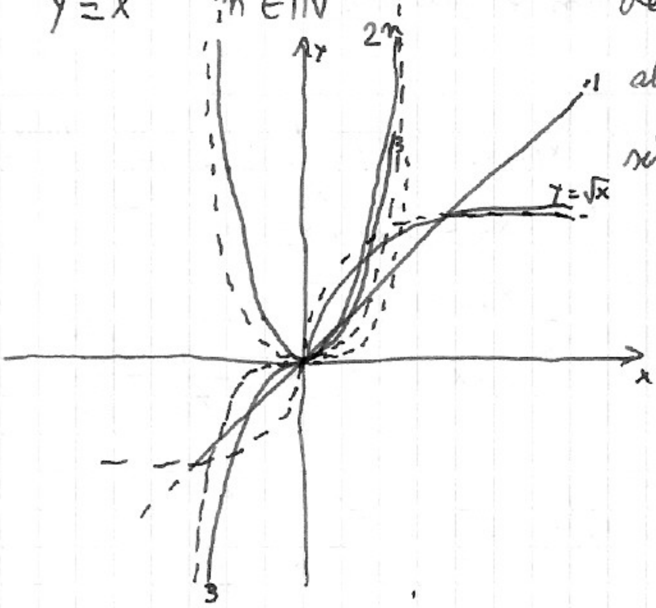
$$=\left(-\frac{2}{77}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{7^2}\right)$$

RIS: $\left(\frac{11}{2}\right)^{-3}:\frac{5}{7}$?

⑦

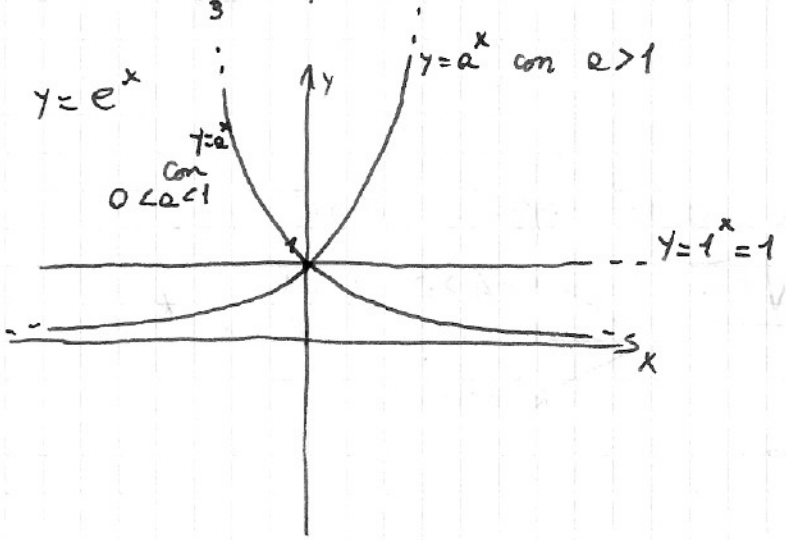
3ª LEZIONE

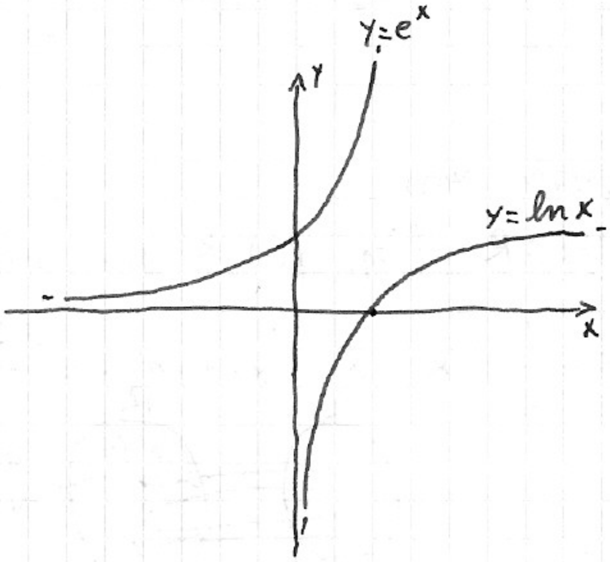
$y = x^n \quad ; n \in \mathbb{N}$

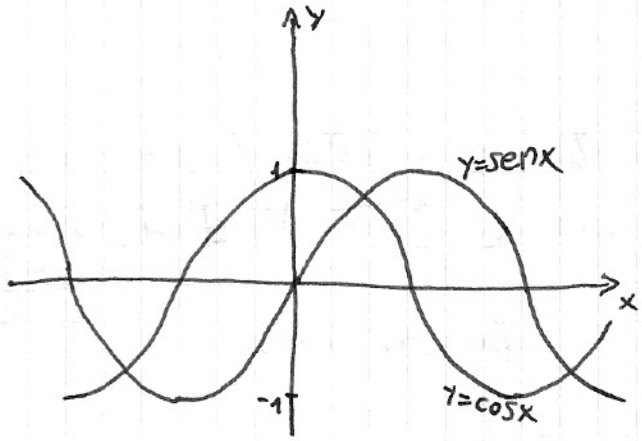


Le potenze pari sono simmetriche rispetto all'asse y, mentre quelle dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

$y = e^x$







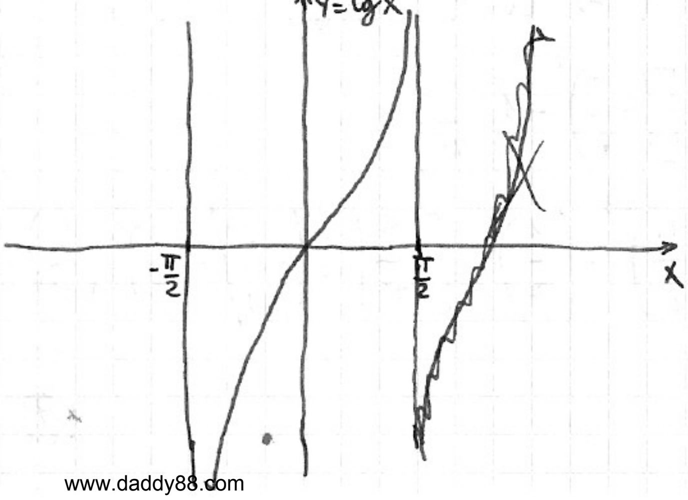
y=cosx è simmetrica rispetto all'asse y.

y=senx è simmetrica rispetto all'origine

FUNZIONE PARI → simmetrica rispetto all'asse y

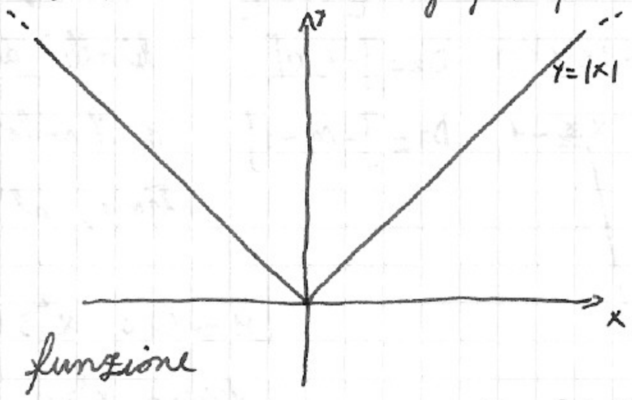
FUNZIONE DISPARI → simmetrica rispetto all'origine

Seno e coseno non sono invertibili

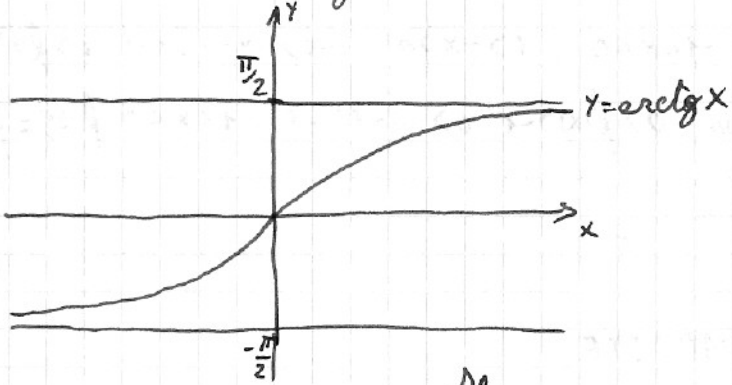


$y=|x|$ Calcolare il modulo di un numero significa farlo diventare positivo

$$y=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$



$y=\text{arctg}\,x$ per fare la funzione inversa della tangente considero solo l'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$



$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x>0 \quad x\in\underbrace{]0,+\infty[}_{D_1} \ \text{(1) iniettiva?}\\ 2+2x & \text{se } x\leq 0 \quad x\in\underbrace{]-\infty,0]}_{D_2} \ \text{(2) suriettiva?}\end{cases}$$

(2) $f(D_1)\cup f(D_2)$ deve dare $\mathbb{R}$

(1) iniettività in ognuno dei due domini, ma non in entrambi; quindi $f(D_1)\cap f(D_2)=\emptyset$

D_1 $\quad x>0 \quad x+1>0+1 \quad x+1>1 \quad f(x)>1$

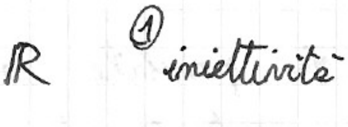
VICEVERSA $\quad f(x)>1 \quad x+1>1 \rightarrow x>0 \quad f(D_1)=]1,+\infty[$

tutti i risultati di $f(x)>1$ vengono dall'intervallo $]0,+\infty[$

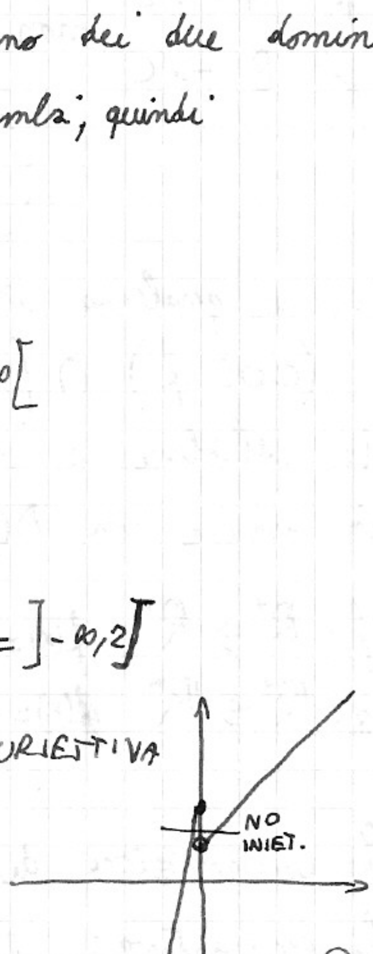
D_2 $\quad x\leq 0 \quad 2+2x\leq 0+2 \quad f(x)\leq 2 \quad f(x)\in]-\infty,2]$

VICEVERSA $\quad f(x)\leq 2 \quad 2+2x\leq 2 \quad 2x\leq 0 \quad x\leq 0 \qquad f(D_2)=]-\infty,2]$

(2) $]1,+\infty[\,\cup\,]-\infty,2]=\mathbb{R}$



SÍ, SURIETTIVA

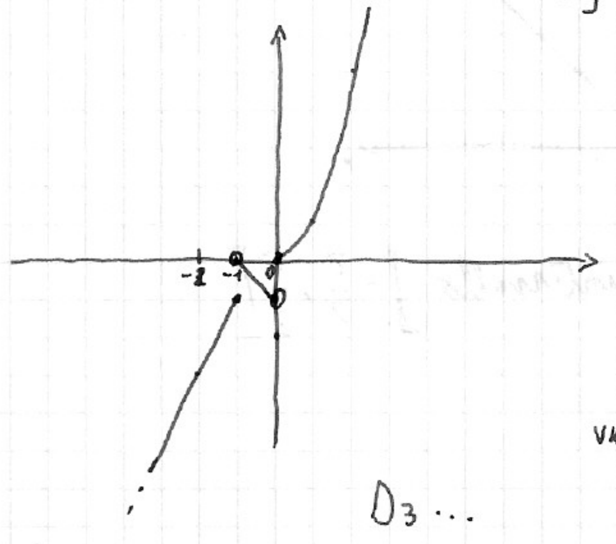


(1) $f(D_1)\cap f(D_2)=]1,2]\neq\emptyset$ NON È INIETTIVA

8

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x-1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2x+1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} D_1 = [0, +\infty[\\ D_2 =]-1, 0[\\ D_3 =]-\infty, -1] \end{array}$$

Se l'uguale fosse stato in due livelli diversi ($-1 \leq x < 0$ e $x \leq -1$), o il valore della funzione è lo stesso, altrimenti non è una funzione



$D_1 \Rightarrow x \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \quad f(x) \geq 0$ VICEVERSA

$f(x) \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \quad \forall x \quad f(D_1) = [0, +\infty[$

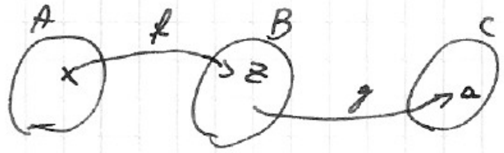
$D_2 \quad -1 < x < 0 \quad 1 > -x > 0 \quad 1-1 > -x-1 > 0-1 \quad 0 > f(x) > -1$

VICEVERSA $\quad 0 > f(x) > -1 \quad 0 > -x-1 > -1 \quad -1 < x < 0 \quad f(D_2) =]-1, 0[$

$D_3 \ldots$

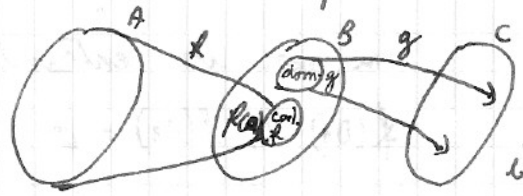
Funzione iniettiva e suriettiva

FUNZIONI COMPOSTE



$x \to f(x) = z \to g(z) = t \qquad t = g(z) = g[f(x)] =$
$= g \circ f(x)$

$f: A \to B$
$g: B \to C$ non è detto sia possibile comporre le funzioni.



Per comporre le funzioni il codominio della prima deve avere qualcosa in comune con il dominio della seconda.

$(\text{COD } f) \cap (\text{DOM } g) \neq \emptyset$ Il dominio è più semplice da calcolare e se è tutto $\mathbb{R}$, il codominio ha sicuramente qualcosa in comune con $D(g)$.

$f \circ g = f[g(x)]$ non esiste, non vale il viceversa.

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x+2$
$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad g(x) = x^2$

$f \circ g = f[g(x)] = g(x) + 2 = x^2 + 2$
$\neq$
$g \circ f = g[f(x)] = [f(x)]^2 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

La composizione di funzioni <u>non</u> è commutativa, ma può valere la associativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

$f: x \to 2x$

$g: x \to 1-x^2$

$h: x \to \operatorname{sen} x$ Si dimostra vedendo che le funzioni risultanti sono uguali.

$f(x) = x-2$ $\quad g(x) = 4-3x$ $\quad$ dominio e codominio? $f \circ g$? $g \circ f$?

Sono due rette, quindi iniettive e suriettive $\quad f^{-1}$? g^{-1}? $f^{-1} \circ g^{-1}$? $(g \circ f)^{-1}$?

$f^{-1}(x) = x+2 \quad (x-2=k \quad x=k+2$ a k sostituisco $x)$

$g^{-1}(x) = \dfrac{4-x}{3} \quad \left(4-3x=k \quad -3x=k-4 \quad x=\dfrac{4-k}{3}\right)$

Dominio e codominio sono entrambi $\mathbb{R}$

$f \circ g : f[g(x)] = g(x)-2 = 4-3x-2 = 2-3x$

$g \circ f : g[f(x)] = 4-3f(x) = 4-3x+6 = 10-3x$

$f^{-1} \circ g^{-1} : f^{-1}[g^{-1}(x)] = g^{-1}(x)+2 = \dfrac{4-x}{3}+2 = -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$

$(g \circ f)^{-1}$ è calcolabile perché $g \circ f$ è una lineare $\quad 10-3x=k \quad -3x=k-10$

$x = -\dfrac{1}{3}k+\dfrac{10}{3}$

$(g \circ f)^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$ che è uguale a $f^{-1} \circ g^{-1}$

$g^{-1} \circ f^{-1} : g^{-1}[f^{-1}(x)] = \dfrac{4-f^{-1}(x)}{3} = \dfrac{4-x-2}{3} = \dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}x$ =

$[f \circ g]^{-1} \to \quad 2-3x=k \quad -3x=k-2 \quad x=-\dfrac{1}{3}k+\dfrac{2}{3} \quad [f \circ g]^{-1} = -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$$

L'inverso di una funzione composta si ottiene componendo le due funzioni inverse.

$f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}-1$

$g(x) = \log x$

$f \circ g$ e $g \circ f$

$f(x)$: D: $x^2-2x+3 \geq 0 \quad \{ x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-3}}{1} = $ IMP.

D: $\mathbb{R}$ quindi $D(f) \cap C(g) \neq \emptyset$

$g(x)$: D: $\log x \Rightarrow x>0 \quad$ D: $\mathbb{R}^+$

C: $\mathbb{R}$ quindi $D(g) \cap C(f) \neq \emptyset$

C → trovo il valore minimo

$y = x^2-2x+3$

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1 \quad y_v = 2$

$f(x) \geq \sqrt{2}-1$

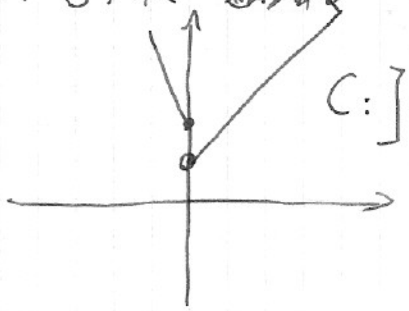
9

$f\circ g = \sqrt{[g(x)]^2 - 2g(x) + 3} - 1 = \sqrt{\log^2 x - 2\log x + 3} - 1$ $\qquad$ cod $f = [\sqrt{2}-1, +\infty[$

$g\circ f = g[f(x)] = \log f(x) = \log\left[\sqrt{x^2-2x+3} - 1\right] = \log\sqrt{x^2-2x+3} - \cancel{\log 1} = \log\sqrt{x^2-2x+3}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2-2x & \text{se } x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) = x^2 \qquad f\circ g \text{ e } g\circ f$$

$f:\ D: \mathbb{R}$ $\qquad$ $g:\ D: \mathbb{R} \quad C: \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



$C:]1, +\infty[\qquad f\circ g = f[g(x)] \qquad g\circ f = g[f(x)]$

$D(f) \cap C(g) \ne \emptyset \qquad D(g) \cap C(f) \ne \emptyset$

$$f\circ g = \begin{cases} g(x)+1 & \text{se } g(x) > 0 \\ 2-2g(x) & \text{se } g(x) \le 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x^2 > 0 \to x \ne 0 \\ 2-2x^2 & \text{se } x^2 \le 0 \to x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \ne 0 \\ 2-2x^2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dato che $x=0$ è un solo valore, scrivo $f\circ g = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \ne 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$g\circ f = f^2(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{se } x > 0 \\ 4+4x^2-8x & \text{se } x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{se } x > 0 \\ 4x^2-8x+4 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2-2x & \text{se } x \le 0 \end{cases} \qquad f\circ f = f[f(x)] = \begin{cases} f(x)+1 & \text{se } f(x) > 0 \\ 2-2f(x) & \text{se } f(x) \le 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (x+1)+1 & \text{se } \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \quad x > -1 \end{cases} \\ (2-2x)+1 & \text{se } \begin{cases} x \le 0 \\ 2-2x > 0 \quad -2x > -2 \quad x < 1 \end{cases} \\ 2-2(x+1) & \text{se } \begin{cases} x > 0 \\ x+1 \le 0 \quad x \le -1 \end{cases} \\ 2-2(2-2x) & \text{se } \begin{cases} x \le 0 \\ 2-2x \le 0 \quad x \ge 1 \end{cases} \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{se } x > 0 \\ 3-2x & \text{se } x \le 0 \\ \emptyset \\ \emptyset \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{se } x > 0 \\ 3-2x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \ge 0 \\ 2x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{se } x \ge -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$g \circ f = g[f(x)] = \begin{cases} -\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} & \text{se } f(x) \geq -1 \\ -f(x) - 1 & \text{se } f(x) < -1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2} & \text{se } \begin{cases} x+1 \geq -1 & x \geq -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ -\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} & \text{se } \begin{cases} 2x+1 \geq -1 & 2x \geq -2 \quad x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \\ -(x+1) - 1 & \text{se } \begin{cases} x+1 < -1 & x < -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ -(2x+1) - 1 & \text{se } \begin{cases} 2x+1 < -1 & x < -1 \\ x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \emptyset \\ -2x - 2 & \text{se } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -2x - 2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$f \circ g = f[g(x)] = \begin{cases} g(x) + 1 & \text{se } g(x) \geq 0 \\ 2g(x) + 1 & \text{se } g(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 & \text{se } \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0 & -\frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2} \quad x \leq -1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ -x - 1 + 1 & \text{se } \begin{cases} -x - 1 \geq 0 & -x \geq 1 \quad x \leq -1 \\ x < -1 \end{cases} \\ 2\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{se } \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} < 0 & x > -1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ 2(-x-1) + 1 & \text{se } \begin{cases} -x - 1 < 0 & -x < 1 \quad x > -1 \\ x < -1 \end{cases} \end{cases} =$$

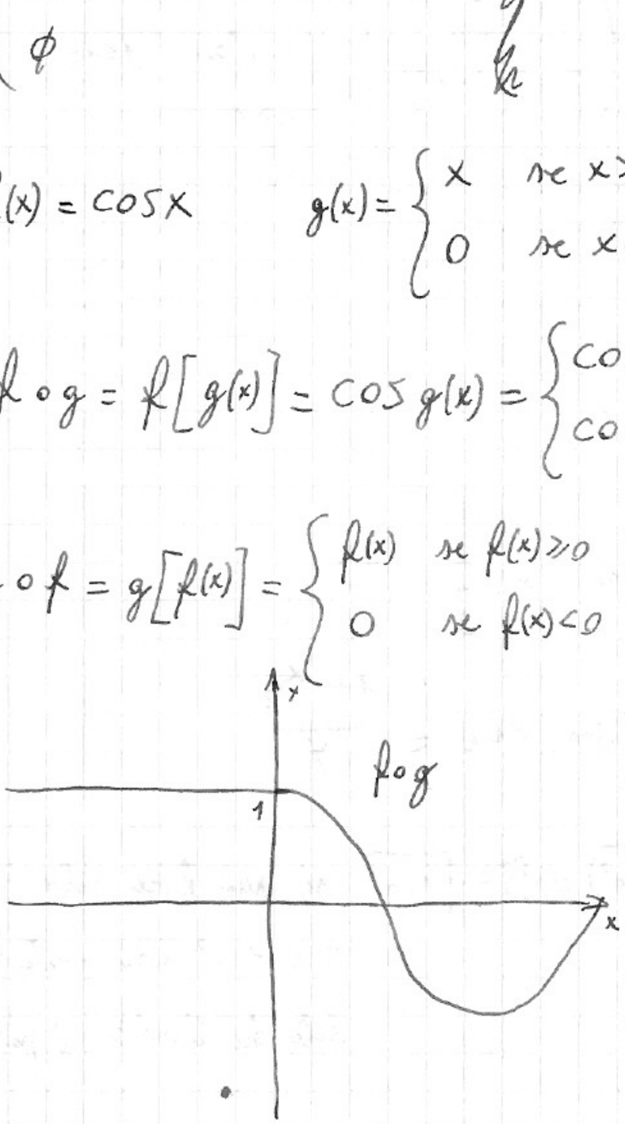
$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{se } x = -1 \\ -x & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } x > -1 \\ \emptyset \end{cases} = \cancel{\left\{ -x \right.}$$

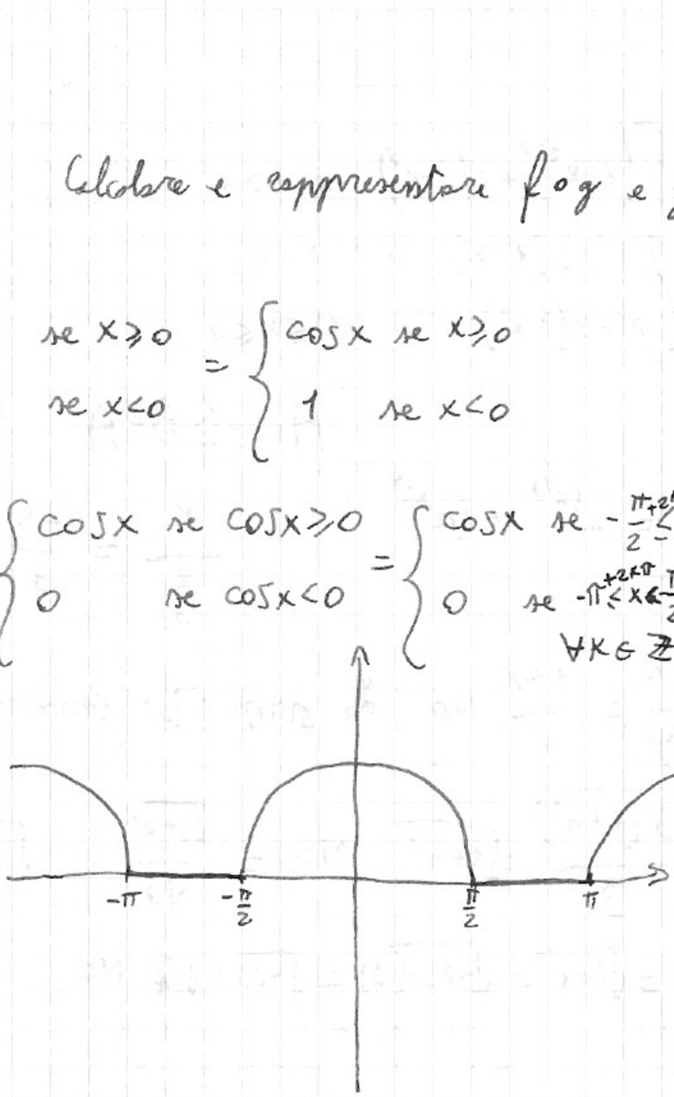
$$f \circ g = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ Calcolare e rappresentare $f \circ g$ e $g \circ f$

$$f \circ g = f[g(x)] = \cos g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ \cos 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g \circ f = g[f(x)] = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos x & \text{se } \cos x \geq 0 \\ 0 & \text{se } \cos x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 & \text{se } -\pi + 2k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$





10

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{se } x<0\\ 1-x^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}x^2+2x & \text{se } x<0\\ 2-3x & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

$$f\circ g = f[g(x)] = \begin{cases}1-g(x) & \text{se } g(x)<0\\ 1-g(x)^2 & \text{se } g(x)\geq 0\end{cases} = \begin{cases}1-(x^2+2x) & \text{se } \begin{cases}x^2+2x<0\\ x<0\end{cases} \quad x(x+2)=0 \quad x=0,\ x=-2\\ 1-(x^2+2x)^2 & \text{se } \begin{cases}x^2+2x\geq 0\\ x<0\end{cases} \quad x\leq -2 \vee x\geq 0\\ 1-(2-3x) & \text{se } \begin{cases}2-3x<0\\ x\geq 0\end{cases} \quad -3x<-2 \quad x>\frac{2}{3}\\ 1-(2-3x)^2 & \text{se } \begin{cases}2-3x\geq 0\\ x\geq 0\end{cases} \quad -3x\geq -2 \quad x\leq \frac{2}{3}\end{cases}$$

$$= \begin{cases}1-x^2-2x & \text{se } -2<x<0\\ 1-x^4-4x^3-4x^2 & \text{se } x\leq -2\\ 3x-1 & \text{se } x>\frac{2}{3}\\ 1-4-9x^2+12x & \text{se } 0\leq x\leq \frac{2}{3}\end{cases} = \begin{cases}-x^2-2x+1 & \text{se } -2<x<0\\ -x^4-4x^3-4x^2+1 & \text{se } x\leq -2\\ 3x-1 & \text{se } x>\frac{2}{3}\\ -9x^2+12x-3 & \text{se } 0\leq x\leq \frac{2}{3}\end{cases}$$

$$g\circ f = g[f(x)] = \begin{cases}[f(x)]^2+2f(x) & \text{se } f(x)<0\\ 2-3f(x) & \text{se } f(x)\geq 0\end{cases} = \begin{cases}(1-x)^2+2(1-x) & \text{se } \begin{cases}1-x<0\\ x<0\end{cases} \quad x>1 \quad \emptyset\\ (1-x^2)^2+2(1-x^2) & \text{se } \begin{cases}1-x^2<0\\ x\geq 0\end{cases} \quad x^2>1 \quad x=\pm 1 \quad x<-1 \vee x>1\\ 2-3(1-x) & \text{se } \begin{cases}1-x\geq 0\\ x<0\end{cases} \quad -x\geq -1 \quad x\leq 1\\ 2-3(1-x^2) & \text{se } \begin{cases}1-x^2\geq 0\\ x\geq 0\end{cases} \quad -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(1-x^2)^2+2(1-x^2) & \text{se } x>1\\ 2-3(1-x) & \text{se } x<0\\ 2-3(1-x^2) & \text{se } 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

ALGEBRA

$a^{x^y} = a^{(x^y)} \neq (a^x)^y$

$\dfrac{x}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2x}{3}$ No $\quad x : \dfrac{2}{3} = \dfrac{3x}{2}$

$\dfrac{2+x}{\cancel{2y}} = \dfrac{1+x}{y}$ No La proprietà invariantiva dice $= \dfrac{1+x/2}{y}$

$\dfrac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3} = \sqrt{1+a^2}$ No $= \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{3}}$ $\quad \sqrt{3(1+a^2)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{1+a^2}$ si può fare solo se 3 e $1+a^2$ sono positivi dato che l'indice è pari (2)

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{-25\cdot(-4)} = \sqrt{-25}\cdot\sqrt{-4}$ No

$\frac{x}{x} = 1$ vera per $x \neq 0$

$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$ QUADRATO DI UN BINOMIO

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ CUBO DI UN BINOMIO

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ SOMMA PER DIFFERENZA

ESEMPIO PARTICOLARE

$(3x-2y+z+1)\cdot(3x-2y+z+1) = (3x-2y+z+1) = 9x^2+4y^2+z^2+1-12xy+6xz+6x-4yz-4y+2z$

$(3x-2y+z+1)\cdot(-3x+2y-z-1) = -(3x-2y+z+1)^2$ = COME SOPRA CON SEGNI OPPOSTI

$(3x-2y+z+1)\cdot(3x+2y+z-1) = [(3x+z)+(1-2y)]\cdot[(3x+z)-(1-2y)] = (3x+z)^2-(1-2y)^2$

$(x^2+x+1)(x^2-x+1) - x^2(x^2+1) = [(x^2+1)+x][(x^2+1)-x] - x^2[x^2+1] = (x^2+1)^2 - x^2 - x^4 - x^2 =$

$= \cancel{x^4} + 1 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{x^4} = 1$

$3x^2y + 5ax^3y$ è un polinomio di 5° grado

$10^{11}x^3 + 5^{33}$ è un polinomio di 3° grado

$\left[\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\cdot\left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{2}a\right) + \left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}a\right)^2 - a\cdot\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\right] : \left[\left(\frac{4}{5}a - \frac{5}{4}b\right)^2 + 2ab\right] =$

$= \left[+\cancel{\left(\frac{1}{2}a\right)^2} - \cancel{\left(\frac{1}{3}b\right)^2} + \left(\cancel{\frac{1}{9}b^2} + \cancel{\frac{1}{4}a^2} - \cancel{\frac{1}{3}ab}\right) - \cancel{\frac{1}{2}a^2} + \cancel{\frac{1}{3}ab}\right] : \left[\frac{16}{25}a^2 + \frac{25}{16}b^2 - \cancel{2ab} + \cancel{2ab}\right] =$

$= 0 : \left[\frac{16}{25}a^2 + \frac{25}{16}b^2\right] = 0$ $(a-b) = -(b-a)$

non ha senso se $a = b = 0$ $(a-b)^2 = (b-a)^2$

$(4x^2+4-11x+4x^3) : (2x^2-4+3x) =$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3+4x^2-11x+4 & 2x^2+3x-4 \\
\underline{-4x^3-6x^2+8x} & \overline{2x-1} \\
\text{"} \quad -2x^2-3x+4 & \\
\underline{\quad\; 2x^2+3x-4} & \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} &
\end{array}
$$

$= 2x-1$

$(x^3-3x+1) : (x+2) =$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-3x+1 & x+2 \\
\underline{-x^3-2x^2} & \overline{x^2-2x+1} \\
\text{"} \; -2x^2-3x+1 & \\
\underline{\quad 2x^2+4x} & \\
\text{"} \quad x+1 & \\
\underline{\quad -x-2} & \\
\text{"} \quad -1 &
\end{array}
$$

$= x^2-2x+1-\frac{1}{x+2}$

(11)

Si può usare Ruffini solo se il divisore è di primo grado e il coefficiente della x è 1.

divisore: $x+2$ $\xrightarrow{\text{cambio segno}}$ -2

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}$$

$Q: x^2-2x+1$

$R: -1$

Se calcolassi $P(-2)$, troverei il resto $P(x)=x^3-3x+1$

$P(-2) = -8+6+1 = \boxed{-1} \rightarrow$ resto

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) \qquad x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^7+y^7=(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$$ segni alternati, grado di x che decresce

$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=\dots$$ scompongo i cubi

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})$$

$$\pm\ \frac{5y^2-xy}{\underset{(-y+x)(y+x)}{y^2-x^2}}-\frac{3y}{x+y}+\frac{2y}{x-y}=\frac{\cancel{xy-5y^2-3xy+3y^2+2xy+2y^2}}{(x+y)(x-y)}=$$ C.E. $x\neq\pm y$

$$=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}\cdot\left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}=$$ C.E.: $a\neq0$, $b-c\neq0$ $b\neq c$, $b\neq0$ $c\neq0$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{b-c+a}{\cancel{a(b-c)}}}{\frac{b-c-a}{\cancel{a(b-c)}}}\cdot\left(\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-c+a}{b-c-a}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}+\frac{(a+b)^2}{2bc}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-c+a}{b-c-a}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}+\frac{(a+b)^2}{2bc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-a-b+c}{\cancel{a-b+c}}\cdot\frac{(a+b-c)\cancel{(a-b+c)}}{bc}+\frac{(a+b)^2}{2bc}=$$

$$=\frac{-(a+b-c)^2}{2bc}+\frac{(a+b)^2}{2bc}=\frac{(a+b+a+b-c)\cdot(\cancel{a}+\cancel{b}-\cancel{a}-\cancel{b}+c)}{2bc}=\frac{(2a+2b-c)\cdot\cancel{c}}{2b\cancel{c}}=\frac{2a+2b-c}{2b}$$

$(a+1)x-7a=2a-3x \quad ax+x+3x-9a=0 \quad x(a+4)=9a \quad x=\dfrac{9a}{a+4} \quad a\neq -4$

Se $a=-4$ l'equazione diventa $x\cdot 0=-36 \quad 0=-36$ soluzioni $=\emptyset$

$x^2-x-6=0 \quad (x-3)(x+2)=0 \quad \begin{matrix} x=3 \\ x=-2 \end{matrix}$

$x^2-5x+7=1 \quad x^2-5x+6=0 \quad (x-2)(x-3)=0 \quad \begin{matrix} x=2 \\ x=3 \end{matrix}$

$x^6-3x^3+2=0 \quad t=x^3 \quad t^2-3t+2=0 \quad (t-1)(t-2)=0 \quad \begin{matrix} t=1 \quad x^3=1 \quad x=1 \\ t=2 \quad x^3=2 \quad x=\sqrt[3]{2} \end{matrix}$

$(x+2)(x-2)=0 \quad \boxed{x=\pm 2} \quad S=\{\pm 2\}$

$(x+2)(x-2)=4 \quad x^2-4-4=0 \quad x^2=8 \quad x=\pm 2\sqrt{2} \quad S=\{\pm 2\sqrt{2}\}$

$x(x^2+3)=x(5x-3) \quad x(x^2+3-5x+3)=0 \quad x=0$

$x^2-5x+6=0 \quad (x-2)(x-3)=0 \quad \begin{matrix} x=2 \\ x=3 \end{matrix} \quad S=\{0,2,3\}$

$(3x-1)^2=1 \quad (3x-1)^2-1=0 \quad (3x-1+1)(3x-1-1)=0$

$3x=0 \quad x=0$

$3x=2 \quad x=\dfrac{2}{3} \quad S=\left\{0,\dfrac{2}{3}\right\}$

$\left(\dfrac{1}{3}+x\right)^2=(2x+5)^2 \quad \begin{matrix} \dfrac{1}{3}+x=2x+5 \quad x=\dfrac{1-15}{3}=-\dfrac{14}{3} \\ \dfrac{1}{3}+x=-2x-5 \quad 3x=-\dfrac{16}{3} \quad x=-\dfrac{16}{9} \end{matrix}$

$\dfrac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)}=0 \quad (2x^2+4)^2=0 \quad 2x^2+4=0 \quad x^2=-2$ MAI $S=\emptyset$ l'eq. è impossibile

se $x\neq 0,\ x\neq\pm 1,\ x\neq \pm 2$
(per quelli è indeterm.)

$\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=0 \end{cases} \quad \dfrac{1}{4}+1+1=0$ MAI $S=\emptyset$ impossibile

$\begin{cases} (x^2+4x-5)\cdot(x^2-3ax+2a^2)=0 \\ x^2-2ax=x-2a \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x(2a+1)+2a=0 \\ x^2+4x-5=0 \end{cases}$

$x=\dfrac{2a+1\pm\sqrt{4a^2+1+4a-8a}}{2}=\dfrac{2a+1\pm(2a-1)}{2}= \begin{matrix} 2a \\ 1 \end{matrix}$

$x^2-3ax+2a^2=0 \quad (x+5)(x-1)=0 \quad \begin{matrix} x=-5 \\ x=1 \end{matrix}$

$x=\dfrac{3a\pm\sqrt{9a^2-8a^2}}{2}=\dfrac{3a\pm a}{2}= \begin{matrix} 2a \\ a \end{matrix}$

$S_1=\{2a,1\} \quad S_2=\{1,-5,a,2a\}$

$S=S_1\cap S_2=\{1,2a\}$

$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2)=0 \quad S_1=\{1,2\} \\ (x-2)(x-3)=0 \quad S_2=\{2,3\} \end{cases} \quad S=\{2\}$

12

$$\begin{cases} x^4-3x^2+2=0 \\ x^4-5x^2+6=0 \end{cases} \quad x^2=t \quad \begin{cases} t^2-3t+2=0 \\ t^2-5t+6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)(t-2)=0 & t=1 \quad t=2 \\ (t-2)(t-3)=0 & t=2 \quad t=3 \end{cases}$$

$x^2=1 \quad x=\pm 1$
$x^2=2 \quad x=\pm\sqrt{2}$

$x^2=2 \quad x=\pm\sqrt{2}$
$x^2=3 \quad x=\pm\sqrt{3}$

$S=\{\pm\sqrt{2}\}$

$\sqrt{a^2b^4c^3}=|a|b^2c\sqrt{c}$ $\quad a^2\geq 0\ \forall x \quad b^4\geq 0\ \forall x \quad c^3\geq 0 \quad c\geq 0$

a deve essere positivo

$\sqrt[\overset{3}{6}]{a^{\overset{2}{4}}}=\sqrt[3]{a^2}$ positivo perché a^2

positivo perché 6

$\sqrt[6]{a^{10}}=\sqrt[3]{a^5}$ positivo solo se a è positivo $=\sqrt[3]{|a^5|}=|a|\sqrt[3]{a^2}$

positivo $\forall a$

$a\sqrt{3}\neq\sqrt{3a^2}$ perché il segno della prima dipende da a, mentre il secondo è sempre ≥ 0

$$a\sqrt{3}=\begin{cases} \sqrt{3a^2} & \text{se } a\geq 0 \\ -\sqrt{3a^2} & \text{se } a<0 \end{cases}$$

$\sqrt{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[6]{x}$ $\qquad \sqrt{a\cdot\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{a^2b}}=\sqrt[4]{a^2b}$

$a\geq 0$ no $\forall$ perché

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+b}=\sqrt{a\cdot(a+b)}=\sqrt{a^2+ab}$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[6]{a^3\cdot(a+b)^2}$ se $a+b\geq 0$

$=-\sqrt[6]{a^3\cdot(a+b)^2}$ se $a+b<0$

$\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{48}=\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

RAZIONALIZZAZIONE

La radice dal denominatore si deve sempre togliere razionalizzando il denominatore

$$\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6}_3}=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{x\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{x\sqrt{30}}{12}$$

$$\frac{x\sqrt{5}}{2+\sqrt{6}}=\frac{x\sqrt{5}}{2+\sqrt{6}}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=\frac{x\sqrt{5}(2-\sqrt{6})}{4-6}=\frac{-x\sqrt{5}(2-\sqrt{6})}{2}=\frac{x\sqrt{5}(\sqrt{6}-2)}{2}$$

$\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}=(\sqrt[n]{a})^p$ se n è dispari, $\forall a\in\mathbb{R}$

$\cancel{\sqrt[4]{(-2)^6}\ \nexists}$ $\quad \sqrt[4]{(-2)^3}\ \nexists \Rightarrow$ se n è pari, $a\geq 0$

$$\left(\left(1+a^2\right)^{2/3}\right)^{3/4} = \sqrt{1+a^2} \qquad \left(\left(1+a\right)^{2/3}\right)^{3/4} = \sqrt{1+a}$$

Le potenze con esponenti con denominatore pari esistono solo se il radicando è ≥ 0, quindi:

① $1+a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ② $1+a \geq 0 \quad a \geq -1$

$\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ VERO $\qquad -\frac{1}{5} < -1 \Rightarrow \frac{1}{5} > 1$ FALSO $\qquad \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}$ VERO

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \geq 1 \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{2} < 1 \qquad \frac{1}{x<1} \gg 1$$

$a < 0 < b < c$

$ab < ac$ FALSO $\quad a \cdot b \geq a \cdot c$ VERO $\quad b < c$ se moltiplico per a, il verso cambia $ab > ac$

$ab \leq ac$ FALSO $\quad ab > 0$ FALSO a e b sono opposti

$a \leq b$ e $c \leq d$

$ac \leq b \cdot d$ dipende dal segno, non è sempre vera.

$$\begin{cases} 3x-7y=0 \\ 2x+y=15 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{7}{3}y \\ \frac{14}{3}y+y=15 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{45}{17} \\ x=\frac{7}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{45}^{15}}{17}=\frac{105}{17} \end{cases}$$ metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 3x-7y=0 \\ 2x+7y=15 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ 9-7y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=9/7 \end{cases}$$ metodo di riduzione

$5x=15$

$$\begin{cases} 3x-7y=0 \\ 2x+y=15 \end{cases}$$ metodo di Kramer $\Rightarrow$ le equazioni devono essere in forma normale

termine noto · coeff. y

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 15 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0+7\cdot 15}{3\cdot 1-2(-7)} = \frac{105}{17}$$

coeff. x · coeff. y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{45-0}{17} = \frac{45}{17}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 3x=2(y+3) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x-2y}{6}=\frac{6}{6} \\ 3x-2y-6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2y=6 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$$ sono uguali... ho infinite soluzioni e lo scrivo $$\begin{cases} x=2+\frac{2}{3}y \\ y=y \end{cases}$$

oppure $$\begin{cases} y=k \\ x=2+\frac{2}{3}k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$ sistema <u>indeterminato</u> con ∞^1 soluzioni (parametri arbitrari)

13

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x = 2(y+2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 4 \\ 0 = 2 \text{ MAI} \end{cases}$$

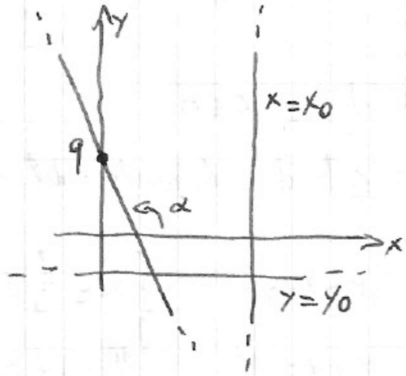
qualunque coppia scelgo, o verifica la prima o verifica la seconda

$S = \emptyset$ sist. impossibile

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - z - 1 \\ y - z - 1 + 2y - z = 8 \\ 3y - 3z - 3 - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - z - 1 \\ 3y - 2z = 9 \\ 2y - z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2y - 6 \\ x = y - 2y + 6 - 1 \\ 3y - 4y + 12 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2y - 6 \\ x = -y + 5 \\ -y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

GEOMETRIA ANALITICA
RETTA



$y = mx + q$ RETTA IN FORMA ESPLICITA
non ci sono le rette verticali

$m = tg\,\alpha$

$ax + by + c = 0$ RETTA IN FORMA IMPLICITA

$y = x$ bisettrice 1° e 3° quadrante $y = -x$ bisettrice 2° e 4°

Le rette crescenti hanno $m > 0$, quelle decrescenti $m < 0$

Le rette parallele hanno stesso m: $m = m'$

Le rette perpendicolari hanno: $m \cdot m' = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{m'}$

Le rette passanti per $P(x_P, y_P)$ hanno equazione $y - y_P = m(x - x_P)$

Il coefficiente angolare di una retta passante per due punti: $m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Distanza tra due punti: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

M punto medio $(AB) \rightarrow \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

Distanza punto $P(x_P, y_P)$ e retta $(ax + by + c = 0)$

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ vale solo se la retta è in forma implicita

Data la retta $r: 3x+y-1=0$ e $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, trovare la retta $s \perp r$ passante per A e l'intersezione tra r e s.

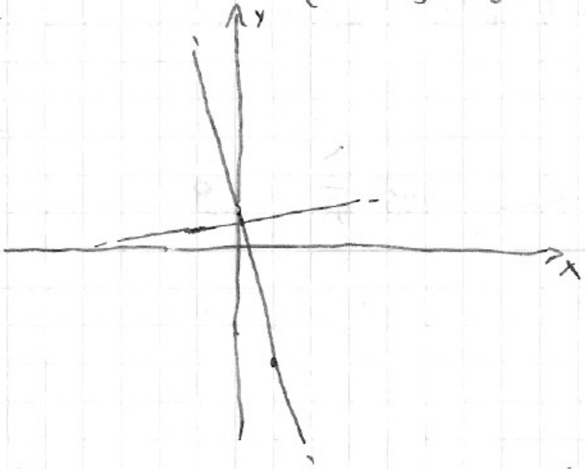
① $s \perp r,\ A \in s \quad y - y_A = m(x - x_A) \quad y - \frac{1}{2} = m(x+1)$

$m_r = ? \quad y = -3x+1 \quad m_r = -3$

$m_s = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \quad y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x+1) \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$

② $s \cap r$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \\ 3x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10}{3}x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{20} \\ y = \frac{1}{60} + \frac{5}{6} = \frac{51}{60} \end{cases} \quad \left(\frac{1}{20}, \frac{51}{60}\right)$$



Distanza tra i punti $(1,2)$ e $(-2,3)$ $\quad d = \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

Retta passante per $(2,-1)$ e $(-1,0)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \frac{y+1}{0+1} = \frac{x-2}{-1-2} \quad y+1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$ oppure

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-0}{2+1} = -\frac{1}{3} \quad y+1 = -\frac{1}{3}(x-2) \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

Retta passante per $(-2,1)$ e $(-2,3)$: $x = -2$

$A(-2,4) \quad B(-2,1) \quad C(1,-2)$

1) equazione dei 3 lati
2) equazione mediana uscente da B
3) $2P$ e $\bar{A}$ di $\widehat{ABC}$

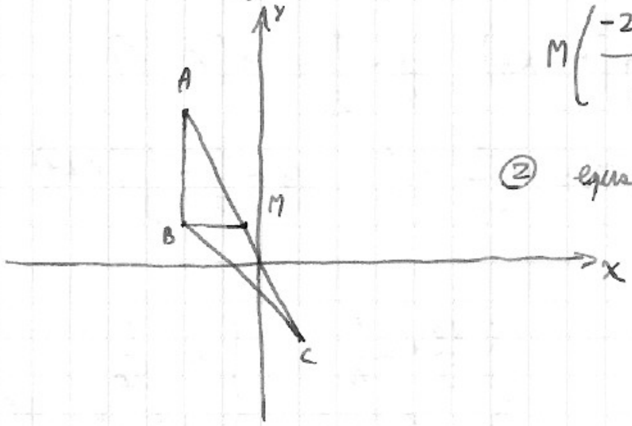
① eq. AB : $x = -2$

eq. AC : $\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x+2}{1+2} \quad \frac{y-4}{-6} = \frac{x+2}{3} \quad y - 4 = -2x - 4 \quad y = -2x \quad y + 2x = 0$

$+2x + y = 0$

14

eq. BC : $\dfrac{y-1}{-2-1} = \dfrac{x+2}{1+2}$ $\quad \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{x+2}{3}$ $\quad y-1=-x-2 \quad y=-x-1$



$M\left(\dfrac{-2+1}{2}; \dfrac{4-2}{2}\right) \quad M\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$

② equazione BM : $y=1$

③

$\overline{AB} = 4-1=3$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2+(4+2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\quad \overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$2P(ABC) = 3+\sqrt{45}+\sqrt{18} = 3(1+\sqrt{5}+\sqrt{2})$

$d_{B-r} = \dfrac{|-2\cdot(+2)+1\cdot 1|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ $\qquad A = \dfrac{AC \cdot d_{B-r}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{9}{2}$

Es. pag 65 n° 2.33 – 2.38

CIRCONFERENZA

$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = r^2$ FORMA ESPLICITA $C(x_c, y_c)$ $r \to$ raggio

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ FORMA IMPLICITA $\quad a=-2x_c \quad b=-2y_c \quad c=x_c^2+y_c^2-r^2$ $\quad C\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$

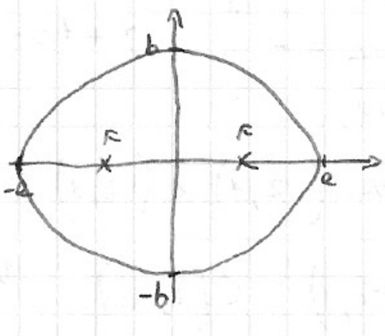
$r = \sqrt{x_c^2+y_c^2-c}$

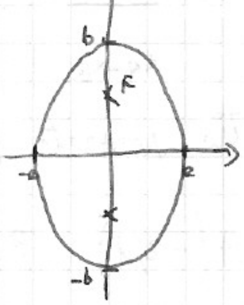
ELLISSE

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ FORMA CANONICA

$a, b \to$ semiasse

I fuochi stanno sul semiasse maggiore

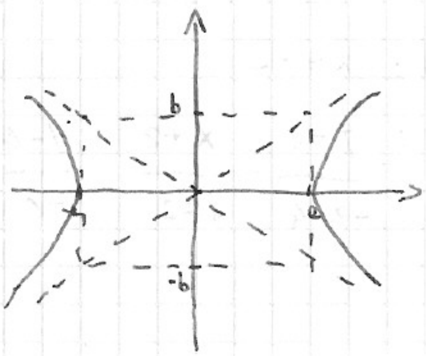




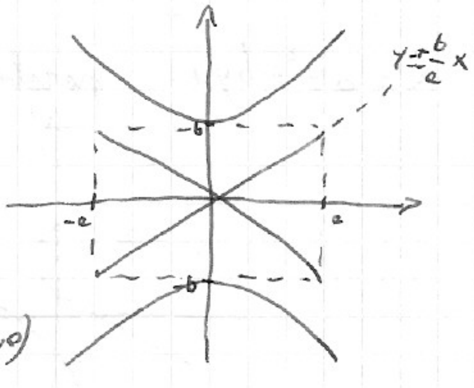
IPERBOLE

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ iperbole che taglia l'asse x

$\pm a \to$ vertici

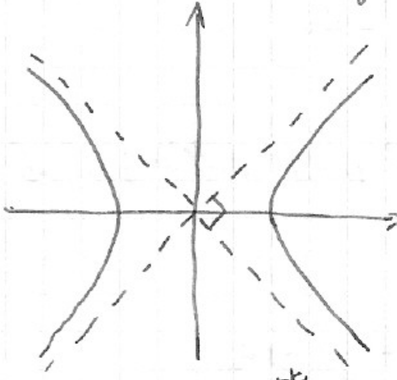


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ o $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ taglia l'asse y



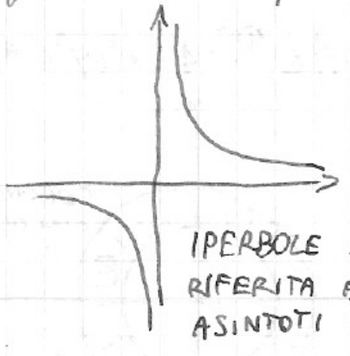
Nell'ellisse, se $a=b$ ottengo una circonferenza con $C(0;0)$

Nell'iperbole, se $a=b$ i due asintoti sono le bisettrici dei quadranti e l'iperbole è EQUILATERA. Gli asintoti sono perpendicolari.



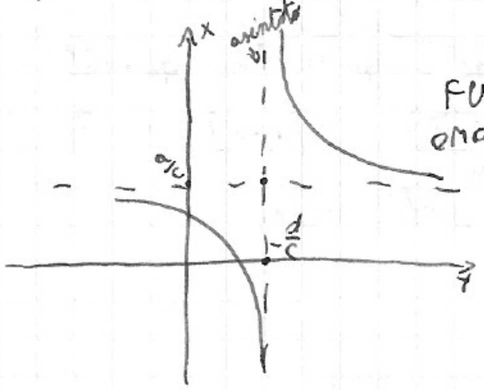
IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASSI

Se faccio ruotare il piano e centro l'iperbole rispetto agli asintoti, diventa



$y = \frac{K}{x}$

IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI PROPRI ASINTOTI



FUNZIONE OMOGRAFICA

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

D: $cx+d \neq 0$ $x \neq -\frac{d}{c}$

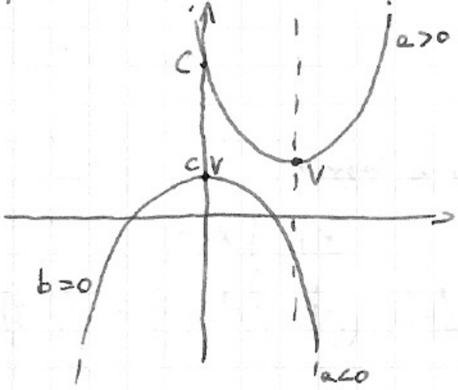
Il centro di simmetria è $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

PARABOLA

$y = ax^2+bx+c$ $a \neq 0$ altrimenti non è una parabola.

Ha asse di simmetria verticale, con equazione $x = -\frac{b}{2a} = x_V$ c → dove la parabola interseca l'asse y

Se $a>0$, la parabola è rivolta verso l'alto; se $a<0$, la parabola è rivolta verso il basso.

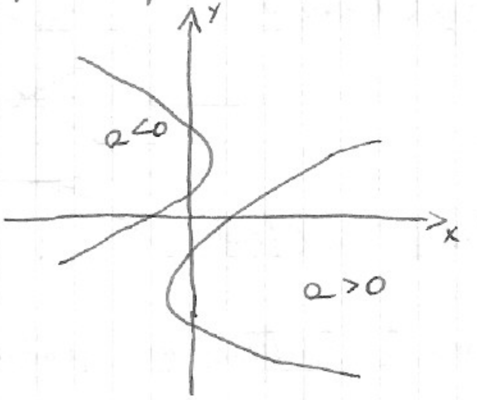


Se $b=0$, l'asse di simmetria coincide con l'asse y

x_V è un punto della parabola e dell'asse di simmetria, cioè $-\frac{b}{2a}$. Per trovare y_V, sostituisco x_V all'equazione della parabola

15

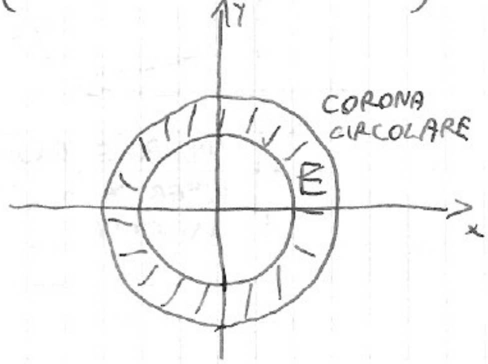
$x = ay^2+by+c$ parabola con asse orizzontale $-\frac{b}{2a} = y_v$ = asse della parabola



Circonferenza con $C(0,0)$ e $r=2$ $\quad x^2+y^2=r^2 \quad x^2+y^2=4$

OSSERVAZIONE

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 4\le x^2+y^2\le 9\}$ $\quad x^2+y^2$ è la distanza del punto dall'origine al quadrato



$x^2+y^2-2x+4y-7\le 0$

$x^2-2x+1 + y^2+4y+4-7-1-4\le 0$

aggiungo e tolgo la stessa quantità

$(x-1)^2+(y+2)^2\le(\sqrt{12})^2 \quad C(1,-2) \quad r=\sqrt{12}$

parte interna

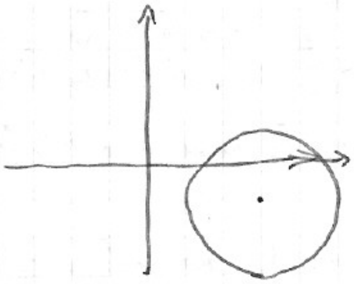
Scrivere l'eq. della cfr con $C(-1,2)$ e $r=1$

$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \quad x^2+2x+\cancel{1}+y^2-4y+4=\cancel{1} \quad x^2+y+2x-4y+4=0$

$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \quad C=? \quad r=? \quad x^2-6x+9+y^2+2y+1+6-9-1=0$

$(x-3)^2+(y+1)^2=4 \quad C(3,-1) \quad r=2$

$-\frac{a}{2}=-\frac{-6}{2} \quad -\frac{b}{2}=-\frac{2}{2}$

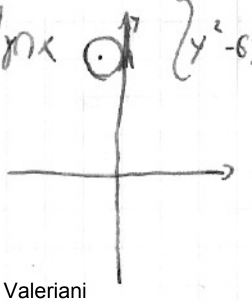


γ) $x^2+y^2+x-6y+9=0$ $\quad$ ① $\gamma\cap x$ e $\gamma\cap y$ $\quad$ ② Centro e raggio

① $\gamma\cap x$ $\begin{cases} y=0 \\ x^2+x+9=0\end{cases}$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-36}}{2}$ = MAI $\nexists\,\gamma\cap x$

$\gamma\cap y$ $\begin{cases}x=0\\ y^2-6y+9=0\end{cases}$ $(y-3)^2=0 \quad y=3 \quad (0,3)$

$C\left(-\frac{1}{2}, 3\right) \quad r=\sqrt{\frac{1}{4}+9-9}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

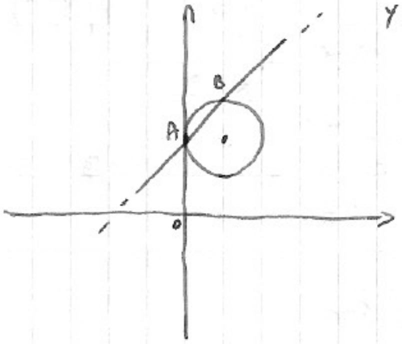


Y è tg alla cfr

Trovare i punti di intersezione tra la retta $x-y+2=0$ e la cfr con $C(1,2)$ e $r=1$

$y=x+2$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1$$



$x^2+\cancel{1}-2x+y^2+4-4y=\cancel{1}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+4=0 \\ y=x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+x^2+\cancel{4}+\cancel{4x}-2x-\cancel{4x}-\cancel{8}+\cancel{4}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+2 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases} \quad x(x-1)=0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

$A(0,2)$ $B(1,3)$

Dimmi se la cfr interseca la retta $y=x-\frac{1}{10}$

① metto la retta in forma implicita: $10y-10x+1=0$

② calcolo la distanza del centro dalla retta: $d=\frac{|20-10+1|}{\sqrt{100+100}}=\frac{11}{10\sqrt{2}}<1$ (raggio r), quindi si intersecano in 2 punti

Se fosse stato $d=r$, allora si intersecano in un punto, altrimenti, se $d>r$, non si intersecano.

eq. cfr. $C(1,4)$ e tg $y=5x+1$ $\quad r=d_{C-tg}=\frac{|5-4+1|}{\sqrt{25+1}}=\frac{2}{\sqrt{26}}$

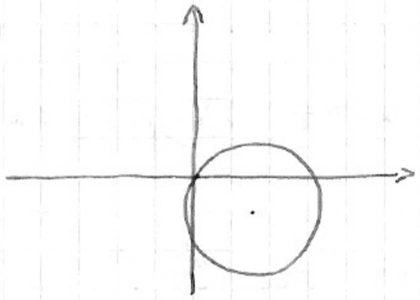
$5x-y+1=0$

$$(x-1)^2+(y-4)^2=\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{26}\,13} \qquad x^2+y^2-2x-8y-\frac{2}{13}+17=0$$

CIRCONFERENZE DI POSIZIONE PARTICOLARE

$x^2+y^2-3x+2y=0$ manca c $\Rightarrow$ circonferenza passante per l'origine

$C\left(\frac{3}{2},-1\right)$

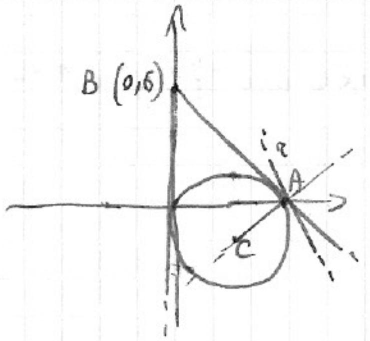


$r=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$x^2+y^2-4x+1=0$ manca b $\Rightarrow$ una coordinata del centro vale 0.

$x^2-4x+4+y^2-4+1=0$ $\quad (x-2)^2+y^2=3$ $\quad C(2,0)$ $\quad r=\sqrt{3}$

16



trovo A $\begin{cases} y=0 \\ x^2-3x=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=0 \\ x=3 \end{matrix}$ $A(3,0)$

$$m_{AC} = \frac{-1-0}{\frac{3}{2}-3} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \qquad m_{tg} = -\frac{3}{2} \qquad y-0 = -\frac{3}{2}(x-3)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$y-6 = m(x-0)$ $y = mx+6$ $mx-y+6=0$

$$d_{c-r} = r \qquad \frac{\left|\frac{3}{2}m+1+6\right|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{elevo al quadrato} \quad \frac{\left(\frac{3}{2}m+7\right)^2}{m^2+1} = \frac{13}{4}$$

$$4\left(\frac{9}{4}m^2+49+21m\right) = 13(m^2+1) \qquad 9m^2+196+84m = 13m^2+13$$

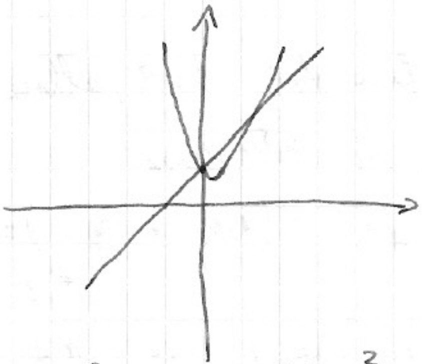
$$4m^2-84m-183=0 \qquad m = \frac{42 \pm \sqrt{42^2+4\cdot 183}}{4} = \dots$$

$$= \frac{42 \pm \sqrt{2^2\cdot 21^2+4\cdot(183)}}{4} = \frac{21 \pm \sqrt{441+183}}{4} \dots = \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \qquad y = m_1x+6 \qquad y = m_2x+6$$

PARABOLA

$y = 3x^2-x+1$ disegnarla e trovare $\cap$ con $y=x+1$

$$V\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}-\frac{1}{6}+1\right) \qquad V\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$



$$\begin{cases} y = 3x^2-x+1 \\ y = x+1 \end{cases} \quad 3x^2-\cancel{x}+\cancel{1} = x+\cancel{1} \quad 3x^2-2x=0 \quad x(3x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$$

$\gamma)$ $y = x^2-4x+k$ determinare k in modo che $\gamma \cap y=-2x$ in due punti distinti

$$\begin{cases} y = x^2-4x+k \\ y = -2x \end{cases} \quad x^2-4x+k = -2x \quad x^2-2x+k=0 \quad \frac{\Delta}{4}>0 \Rightarrow 1-k>0 \quad k<1$$

$y = 3x^2-kx+k-5$ det k in modo che γ passi per $P(2,-1)$

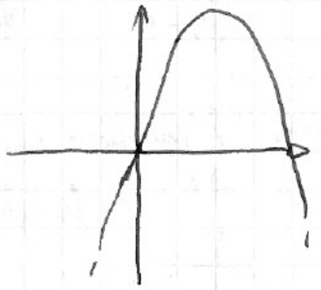
$-1 = 12-2k+k-5$ $-k=-8$ $k=8$

Trovare parabola con asse // asse y passante per (0,0) (1,3) (4,0)

$\hookrightarrow c=0$

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=3 \\ a\cdot 16+4b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ a=3-b \\ 48-16b+4b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=4 \\ a=-1 \end{cases} \quad y=-x^2+4x$$



Se l'asse // asse x

$x = ay^2 + by + c$

$$\begin{cases} c=0 \\ 1=9a+3b \quad \text{IMPOSS.} \\ 4=0 \end{cases}$$

Rette // all'asse taglieno la parabola in un punto.

Per quale valore reale di K la parabola $y=-Kx^2+2x+2$ è tg a $2x+y-6=0$ e quando ha il vertice sulla retta $y=2x-1$ e quando passa per $(2,-2)$

$K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $K=0$ non è una parabola

① $\begin{cases} y=-Kx^2+2x+2 \\ 2x+y-6=0 \end{cases}$ ∄ 1 sola sol.

$2x-Kx^2+2x+2-6=0 \quad -Kx^2+4x-4=0$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \Rightarrow 4-4K=0 \quad K=1$$

$y=-x^2+2x+2$

② $x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-2K}=\frac{1}{K} \qquad y_V=-K\cdot\frac{1}{K^2}+2\cdot\frac{1}{K}+2=\frac{-1+2+2K}{K}=\frac{2K+1}{K}$

$y=2x-1 \qquad \frac{2K+1}{K}=\frac{2}{K}-1 \qquad 2K+1=2-K \qquad 3K=+1 \qquad K=\frac{1}{3} \qquad y=-\frac{1}{3}x^2+2x-2$

③ $-2=-4K+4+2 \qquad -4K=-8 \qquad K=2$

Scrivere l'equazione della retta r passante per $(-2,2)$ e $\perp$ a $x-3y+1=0$.
Trovare il raggio della cfr centrata in $C(0,1)$ e tg a r.

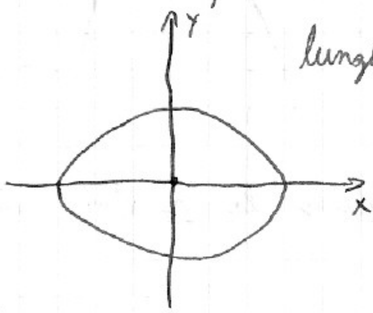
$y-2=m(x+2) \quad y=mx+2m+2 \qquad 3y=x+1 \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \qquad m=\frac{1}{3}$

$m_r=-3 \qquad y=-3x-6+2=-3x-4$

$(x-0)^2+(y-1)^2=r^2 \qquad x^2+y^2-2y+1=r^2 \qquad 3x+y+4=0$

$$d_{c-r} = \frac{|0+1+4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} = r$$

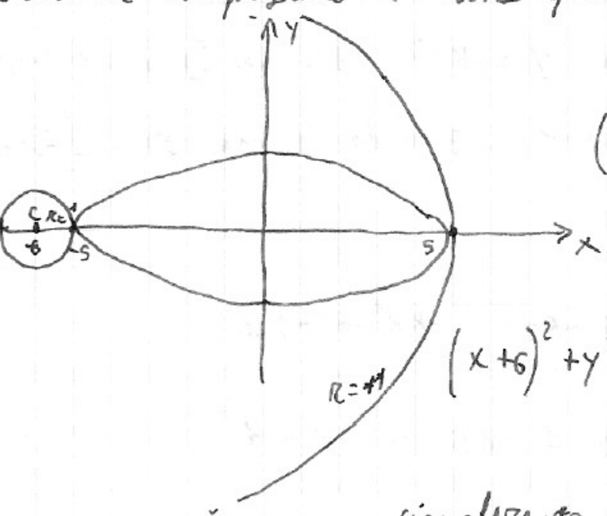
Scrivere l'equazione canonica di un'ellisse centrata nell'origine con i semiassi di lunghezza 5 e 2



$a=5$, $b=2$ o $a=2$, $b=5$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad o \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$$

Scrivere l'equazione di una cfr centrata in $(-6,0)$ tangente all'ellisse



$$(x+6)^2+y^2=1 \qquad x^2+y^2+12x+35=0$$

$$(x+6)^2+y^2=11^2 \qquad x^2+y^2+12x-85=0$$

circonferenza → x^2 e y^2 con coefficiente uguale

retta → x e y parabola → y e x^2 o y^2 e x

iperbole → x^2 e $-y^2$ o $-x^2$ e y^2 ellisse → x^2 e y^2

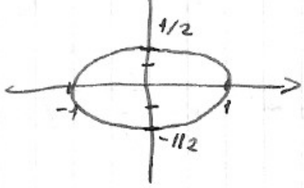
$x^2+4y^2=1$

↓

ellisse

↓

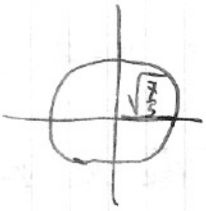
$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$



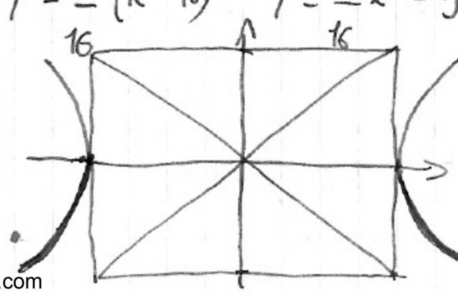
$$x^2+4y^2=9 \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{4y^2}{\frac{9}{4}}=1 \qquad a=\pm 3 \quad b=\pm\frac{3}{2}$$

$5x^2+5y^2=7$

$x^2+y^2=\frac{7}{5}$ circonferenza con $C(0,0)$ $r=\sqrt{\frac{7}{5}}$



$$y=-\underbrace{\frac{3}{4}}_{<0}\underbrace{\sqrt{x^2-16}}_{\geq 0} \qquad \begin{cases} y\leq 0 \\ y^2=\frac{9}{16}(x^2-16) \end{cases} \qquad y^2=\frac{9}{16}x^2-9 \qquad \frac{9}{16}x^2-y^2=9 \text{ iperbole } \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$



Non sempre funziona, solo se elevando al quadrato viene l'equazione di una figura che conosco.

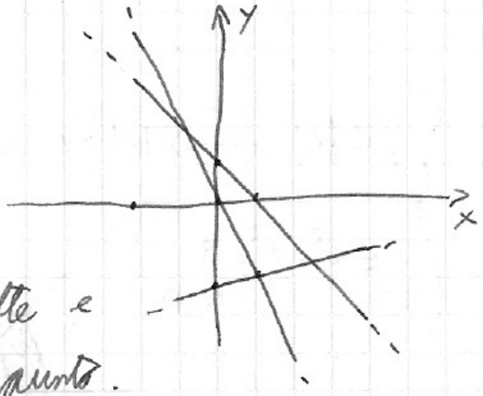
$$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y \\ 3-3y+2y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Due rette intersecate $y=-x+1$ e $y=-\frac{3}{2}x+1$

=

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=7 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ x+6x=7 \\ x-2x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ x=1 \\ -1=1 \end{cases} \quad S=\emptyset$$

sistema impossibile



$y=-2x \quad y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3} \quad y=-x+1$

Non si incontrano tutte e tre in uno stesso punto.

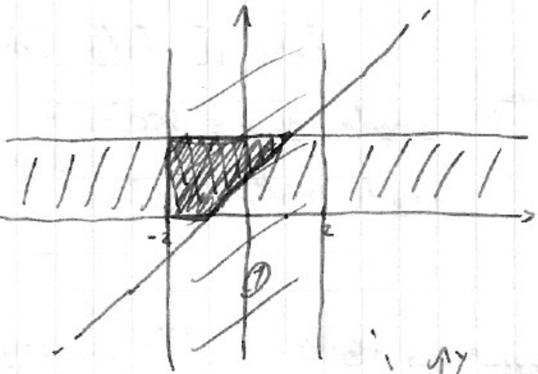
$$\begin{cases} ax+y=1 \\ 2x+ay=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-ax \\ 2x+a(1-ax)=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-ax \\ 2x+a-a^2x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-ax \\ x(2-a^2)=2-a \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-ax \\ x=\frac{2-a}{2-a^2} \end{cases} \text{ se } 2-a^2\neq 0$$

$$\begin{cases} x=\frac{2-a}{2-a^2} \\ y=\frac{2-2a}{2-a^2} \end{cases} \text{ se } 2-a^2\neq 0$$

se $2-a^2=0$ $\quad a=\pm\sqrt{2}$ $\quad 0=\underbrace{2-(\pm\sqrt{2})}_{\neq 0}$ sist. impossibile $S=\emptyset$

Disegnare sul piano cartesiano l'insieme soluzione di ciascuna riga e trovare la soluzione del sistema.

$$\begin{cases} |x|\leq 2 & ① \\ 0\leq y\leq 2 & ② \\ y\geq x+1 & ③ \end{cases}$$



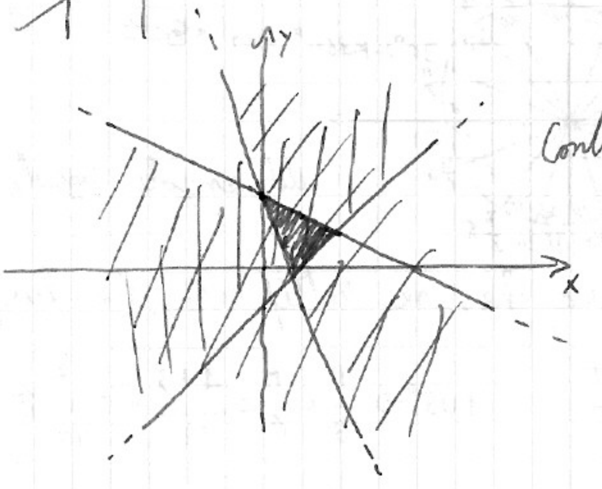
① $-2\leq x\leq 2$

② $0\leq y\leq 2$

③ $y\geq x+1$

contorni compresi

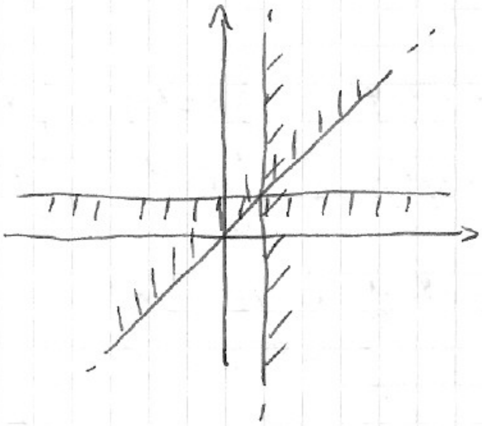
$$\begin{cases} x+y\geq 2-2x \\ x\leq y+1 \\ x+2y-4\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y\geq -3x+2 \\ y\geq x-1 \\ y\leq -\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$$



Contorni compresi

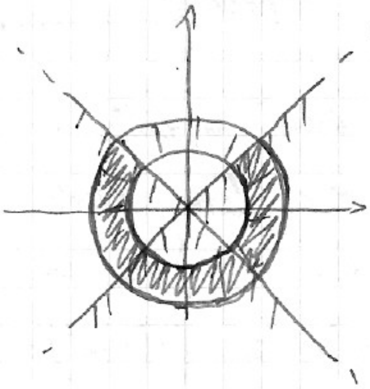
18

$$\begin{cases} x>1 \\ x-y<0 \\ y<1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1 \\ y>x \\ y<1 \end{cases}$$



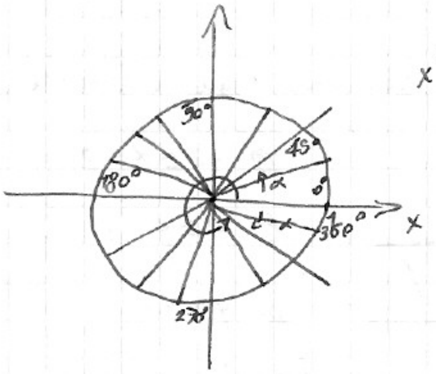
$S=\phi$

$$\begin{cases} y<|x| \Longleftrightarrow |x|>y \quad x>y \text{ o } x<-y \Leftrightarrow y<x \text{ o } y<-x \\ 2 \le x^2+y^2 \le 8 \quad r=\sqrt{2} \quad r=2\sqrt{2} \end{cases}$$



GONIOMETRIA

Costruisce funzioni che prendono misure di angoli e gli associano qualcosa.

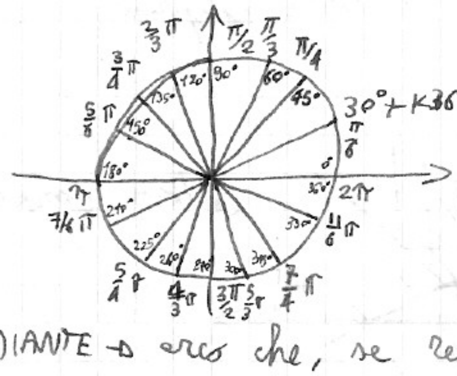


$x^2+y^2=1$ Non c'è limitazione a quanti giri può fare il lato mobile.

angolo giro $= 360° = 2\pi$

angolo piatto $= 180° = \pi$

angolo retto $= 90° = \frac{\pi}{2}$



$30° + K360°$ con $K \in \mathbb{Z}$

$1° = \frac{1}{360}$ angolo giro

Ad angoli uguali corrispondono archi uguali

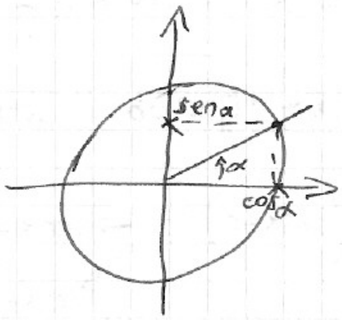
RADIANTE → arco che, se rettificato, ha lunghezza uguale al raggio.

$-45° \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ $\quad 105° \rightarrow \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{4+3}{12}\pi = \frac{7}{12}\pi$ o $\alpha° : \beta^r = 360° : 2\pi$

$105° : \beta^r = 360° : 2\pi$

$\frac{\pi}{12} \rightarrow ?°$ $\quad \alpha° = \frac{\pi}{12} \cdot 180° \frac{1}{\pi} = \frac{\overset{30}{\cancel{180°}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = 15°$ $\quad \beta^r = \frac{105° \cdot 2\pi}{\underset{180}{\cancel{360°}}} = \frac{7}{12}\pi$

Ci sono 9 funzioni



$y = \operatorname{sen} x \qquad y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x$

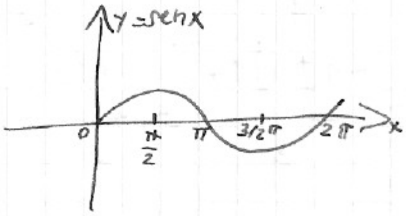
$y = \cos x \qquad y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

$y = \operatorname{tg} x \qquad y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{cotg} x$

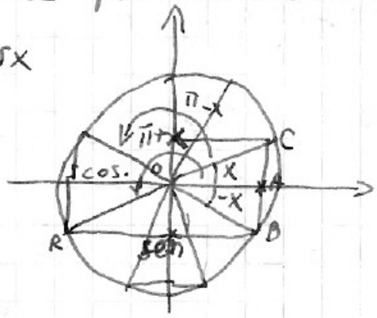
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Seno e coseno sono funzioni periodiche con $T = 2\pi$

$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + k2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$



Trovare la formula per ottenere seno e coseno di $-x$, $x+\pi$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} - x$ noti senx e cosx



$\overset{\triangle}{COA} \cong \overset{\triangle}{AOB} \Rightarrow CA \cong AB \quad OA \cong OA$

$\overset{\triangle}{ROS} \cong \overset{\triangle}{AOC} \quad SR \cong AC \quad OA \cong OS$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

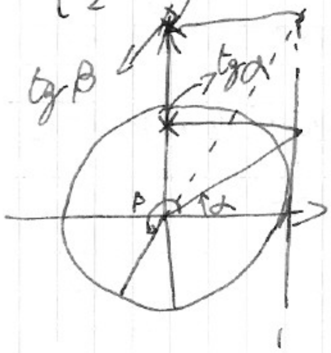
ARCHI ASSOCIATI

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$

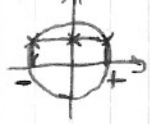


$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ Se $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha \nexists$, cioè se $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$

$T = \pi$ per la tangente

Dato che $x^2 + y^2 = 1$ è l'equazione della circonferenza e che $x = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$

$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1} \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$



19

trova x : $sen x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$sen x - 2 tg x = 0 \quad sen x - 2 \frac{sen x}{cos x} = 0 \quad$ C.E. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad cos x \, sen x - 2 sen x = 0$

$sen x (cos x - 2) = 0 \rightarrow sen x = 0 \quad x = k\pi$

$\rightarrow cos x = 2$ MAI

$x = k\pi$ che è $\neq$ dalle C.E, quindi ACC.

$4 sen^2 x - 1 = 0 \quad 4 sen^2 x = 1 \quad sen^2 x = \frac{1}{4} \quad sen x = \pm \frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

$2 cos^2 x + cos x - 1 = 0 \quad cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} =$

- $-1 \quad cos x = -1 \quad x = \pi + 2k\pi$
- $\frac{1}{2} \quad cos x = \frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$cos^2 x + 2 sen x - 1 = 0$

$\cancel{1} - sen^2 x + 2 sen x = \cancel{0} \quad sen^2 x - 2 sen x = 0 \quad sen x (sen x - 2) = 0$

$sen x = 0 \quad x = k\pi$

$sen x = 2$ IMPOSS.

$sen\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}x^2 + \cancel{\frac{\pi}{6}} = \cancel{\frac{\pi}{6}} + 2k\pi$ o $\frac{3}{4}x^2 + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

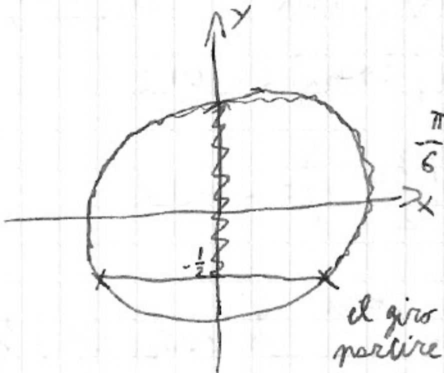
$x^2 = \frac{8}{3}k\pi \quad x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}k\pi}$ per $k \geq 0 \quad \frac{3}{4}x^2 = \frac{4}{6_3}\pi + 2k\pi \quad x^2 = \frac{8}{9} + 2k\pi \quad x = \pm\sqrt{\frac{8}{9} + 2k\pi} \quad k \geq 0$

$sen 2x - 2 cos x = 0 \quad 2 sen x \, cos x - 2 cos x = 0 \quad cos x (sen x - 1) = 0 \quad cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$sen x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ contenuta

$tg \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad tg \frac{\pi}{4} = 1 \quad tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$sen x > -\frac{1}{2}$ in $[0, 2\pi]$



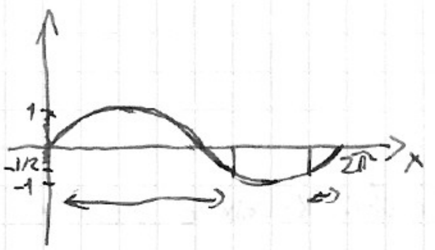
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}\pi$ per tutte le soluzioni

$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

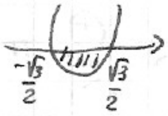
il giro deve partire da 0, quindi devo scrivere

$0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \cup \frac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi$

Altro modo

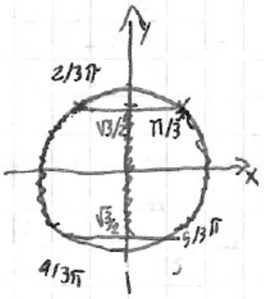


$4\,sen^2x - 3 < 0 \quad sen\,x = y \quad 4y^2 - 3 < 0 \quad y^2 = \frac{3}{4} \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



$-\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < sen\,x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



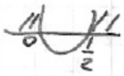
$0 \le x < \frac{\pi}{3} \;\cup\; \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi \;\cup\; \frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$

$\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right[\cup \left]\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$

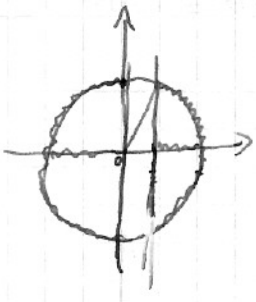
$2\cos^2 x - \cos x \ge 0 \quad [-\pi, \pi] \quad \cos x(2\cos x - 1) \ge 0$

$\cos x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$



$\cos x \le 0 \;\vee\; \cos x \ge \frac{1}{2}$



$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} = \sqrt{2}\cos^2 x \qquad \left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 - \left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2 = \sqrt{2}\cos^2 x$

$\frac{1+\cos x}{2} - \frac{1-\cos x}{2} - \sqrt{2}\cos^2 x = 0 \quad \cos x - \sqrt{2}\cos^2 x = 0 \quad \cos x(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0$

$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

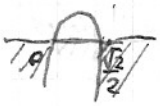
o

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} < \sqrt{2}\cos^2 x \quad \ldots \quad \cos x - \sqrt{2}\cos^2 x < 0 \quad \cos x(1 - \sqrt{2}\cos x) < 0$

$\cos x = 0$

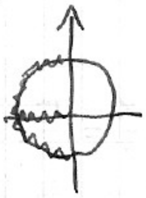
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

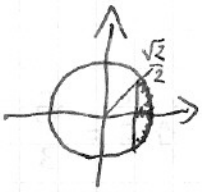


$\cos x < 0$ o $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

$\to -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$



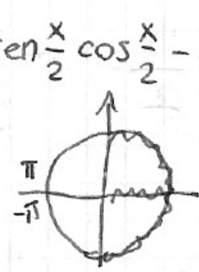


$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$sen\,x > \cos\frac{x}{2} \qquad sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha \qquad 2\,sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} > 0 \qquad \cos\frac{x}{2}\left(2\,sen\frac{x}{2} - 1\right) > 0$

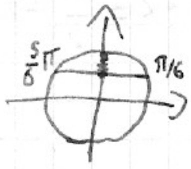
$-2\pi \le x \le 2\pi \Rightarrow -\pi \le \frac{x}{2} \le \pi$

$\cos\frac{x}{2} > 0$



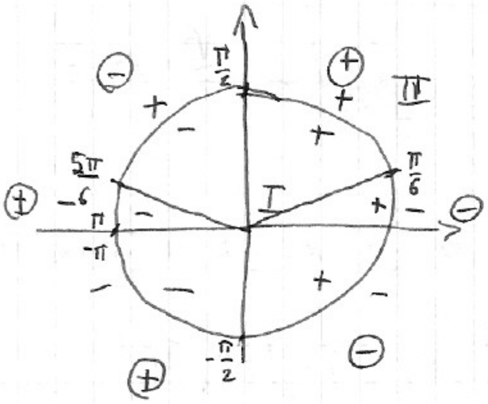
$-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$2\,sen\frac{x}{2} - 1 > 0 \quad sen\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{5}{6}\pi$

(29)



$$-\pi \le \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \frac{5}{6}\pi < \frac{x}{2} \le \pi$$

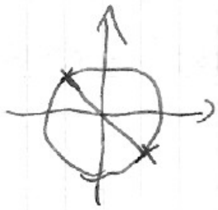
moltiplico per 2 per trovare x

$$-2\pi \le x < -\pi \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi \quad \text{o} \quad \frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$$

$\frac{x}{2}$	$-\pi$ … $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ … $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … $\frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$ … π
I°	−	+	+	−	−
II°	−	−	+	+	−
prodotto	+	−	+	−	+

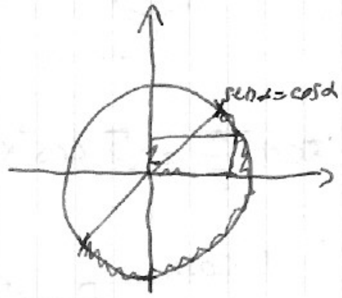
$\operatorname{sen}x + \cos x = 0 \qquad \operatorname{sen}x = -\cos x$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$



$\operatorname{sen}x - \cos x \le 0 \qquad \operatorname{sen}x \le \cos x \qquad$ ord. $\le$ esterna

$$-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$



$$\sqrt{3}\,\overset{A}{\operatorname{sen}x} + \overset{B}{\cos x} = 2 \quad \text{equazione lineare}$$

1° MODO
$$\begin{cases} \sqrt{3}A + B = 2 \\ A^2 + B^2 = 1 \end{cases} \quad \dots$$

2° MODO usando le parametriche

$$\operatorname{sen}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{3}\,\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2$$

ma se $x = \pi$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \nexists$ quindi devo controllare che π non sia soluzione

$$2\sqrt{3}t + 1 - t^2 - 2 - 2t^2 = 0$$

$$3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 = 0 \qquad (\sqrt{3}t - 1)^2 = 0 \qquad t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

3° MODO METODO DELL'ANGOLO AGGIUNTO

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$\sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x = 2$ divido per 2 $\quad \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\operatorname{sen}x + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}\cos x = 1$

$$\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 1$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1 \qquad \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Determinare $tg\,x$ sapendo che x risolve questa equazione

$$sen^2 x - 6\cos^2 x - sen\,x\cos x = 0$$

EQUAZIONE OMOGENEA perché tutti i termini sono di 2° grado

Dovrei dividere per $\cos^2 x$, ma controllo che $x = \pm\frac{\pi}{2}$ non sia sol. $\pm 1 - 6\cdot 0 - 0 = 0$ $\quad \pm 1 = 0$ NO

$$tg^2 x - 6 - tg\,x = 0 \qquad tg^2 x - tg\,x - 6 = 0$$

$$tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} 3 & tg\,x = 3 \\ -2 & tg\,x = -2 \end{cases}$$

$sen\,\alpha = \frac{3}{5} \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\quad \cos\alpha < 0$

$\cos\alpha = ?$

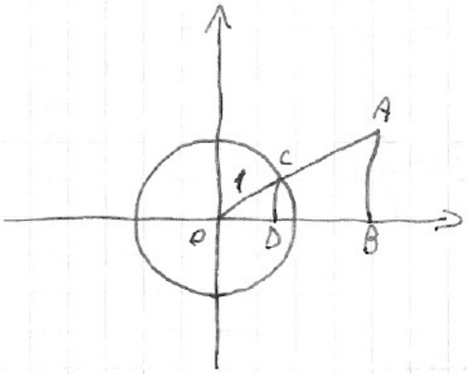
$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$

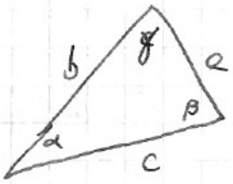
$sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

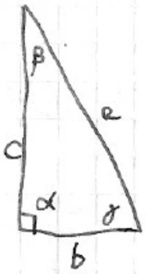


$OA : OC = AB : CD$

$OA : 1 = AB : sen\,\alpha$

$AB = OA\cdot sen\,\alpha \quad e \quad OB = OA\cdot\cos\alpha$

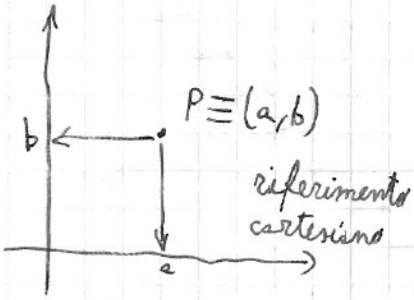


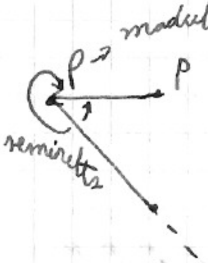


$b = a\cdot sen\,\beta$ → angolo opposto

$c = a\cdot\cos\beta$ → angolo tra c e a

↓ ipotenusa

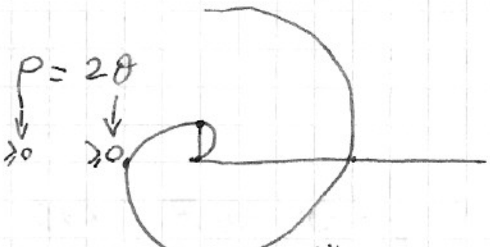




$\rho \geq 0$ modulo

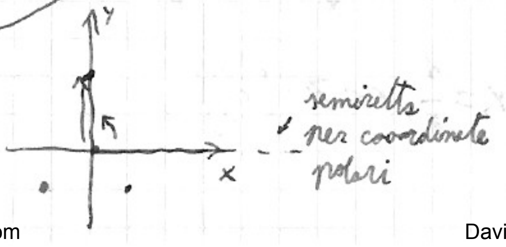
θ argomento

$(\rho,\theta) \Rightarrow \exists!\,P \qquad P(\rho, \theta + 2\pi\cdot k)$ non in corrispondenza biunivoca



$\theta = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \theta = \pi$

$\rho = 0 \quad \rho = \pi \quad \theta = 2\pi$



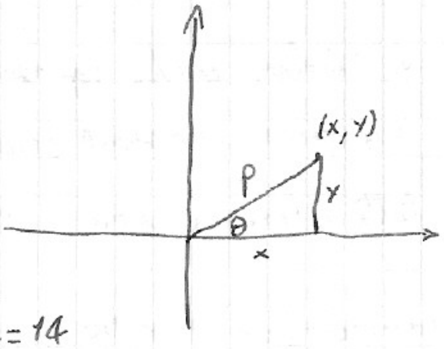
$P(0, 2)$

$Q(1, -1)$

$P\left(2, \frac{\pi}{2}\right) \qquad Q\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

(21)

$P\left(-7\sqrt{3}, 7\right)$



$\boxed{\begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{array}}$ ovunque sia il punto

$\rho^2 = x^2 + y^2$

$\rho = \sqrt{49 \cdot 3 + 49} = \sqrt{49 \cdot 4} = 7 \cdot 2 = 14$

$-7\sqrt{3} = 14 \cdot \cos\theta \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad 7 = 14 \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \qquad P\left(14, \frac{5}{6}\pi\right)$

o

$P(-7\sqrt{3}, 7)$ è nel 2° quadrante $\quad \underset{2°a}{x = \frac{5}{6}\pi} \quad$ o $\quad \cancel{\underset{3°a}{x = \frac{7}{6}\pi}}$

$P\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$ coord. cart. ?

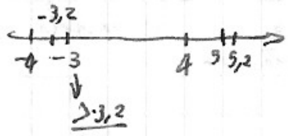
$x = \rho \cdot \cos\theta \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad x = \frac{3}{2} \cdot \cos\frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$

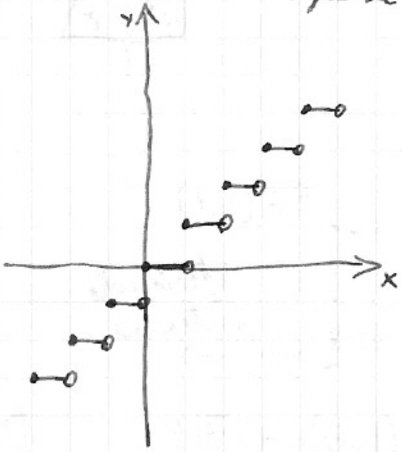
$y = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$

GRAFICI E FUNZIONI

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ parte intera di $x \quad x = 4 \quad \lfloor 4 \rfloor = 4 \quad \lfloor 5{,}2 \rfloor = 5$ parte intera $\downarrow$ + grande intero $\leq x$

$\lfloor -3{,}2 \rfloor = -4$





$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ MANTISSA

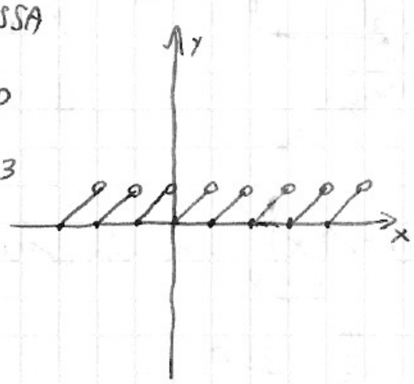
$f(2) = 2 - \lfloor 2 \rfloor = 2 - 2 = 0$

$f(2{,}3) = 2{,}3 - \lfloor 2{,}3 \rfloor = 0{,}3$

$f(-0{,}5) = -0{,}5 - \lfloor -0{,}5 \rfloor =$

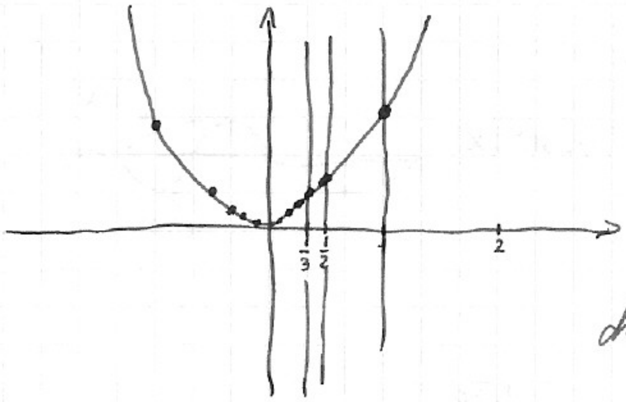
$= -0{,}5 - (-1) = 0{,}5$

$f(-0{,}3) = -0{,}3 + 1 = 0{,}7$



$f(x) = x^2 + \sqrt{-\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right|} \quad -\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right| \geq 0 \quad \left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right| \leq 0 \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0 \quad \frac{\pi}{x} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad x \neq 0$

$\pi = k\pi x \quad x = \frac{1}{k} \quad k \neq 0 \quad D f(x) = \left\{x : x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$



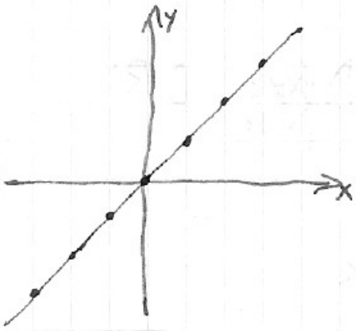
La radice è sempre 0, quindi

$f(x)=x^2$

Il grafico è l'insieme di punti della parabola che possono essere calcolati come $\frac{1}{K}$

$f(x)=x+\sqrt{-|\operatorname{sen} x\pi|}$ $\quad -|\operatorname{sen} x\pi| \geq 0 \quad \operatorname{sen} x\pi = 0 \quad x\pi = K\pi \quad x=K$ con $K \in \mathbb{Z}$

D: $\mathbb{Z}$ $\quad f(x)=x$

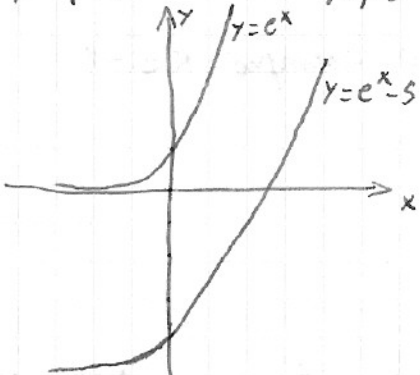


Il grafico è dato solo dai punti perchè $x \in \mathbb{Z}$

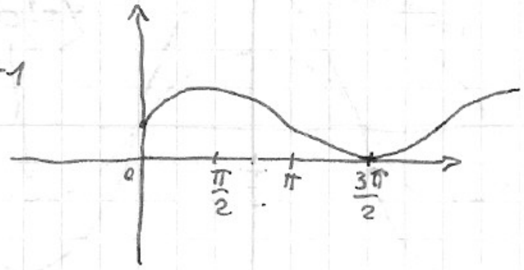
OPERAZIONI CON I GRAFICI

$y=f(x)$ $\quad y=f(x)+K$ stesso grafico traslato di K

$y=e^x-5$



$y=\operatorname{sen} x+1$



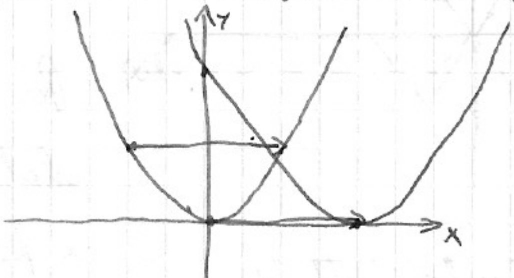
$y=f(x)$ e $y=f(x+K) \Rightarrow$ traslazione in orizzontale di estensione K

se $K>0 \rightarrow$ verso sx

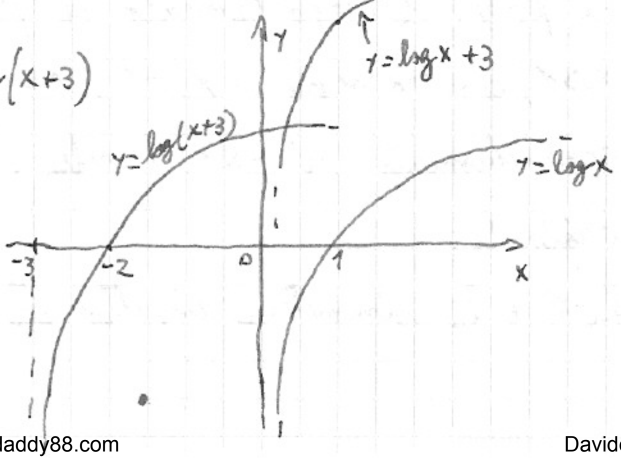
se $K<0 \rightarrow$ verso dx

$y=x^2$ $\quad y=(x-2)^2=x^2-4x+4$

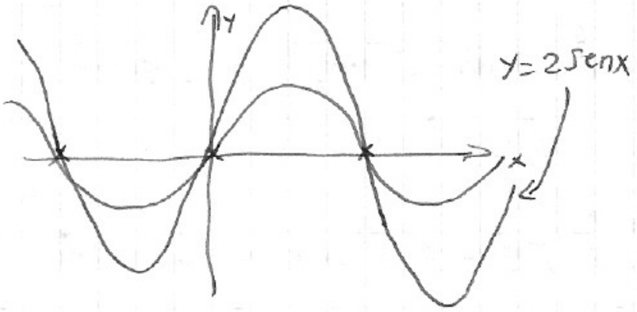
$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ $\quad y_V=0$

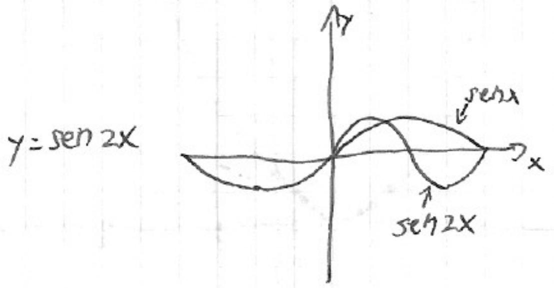


$y=\log(x+3)$



(22)





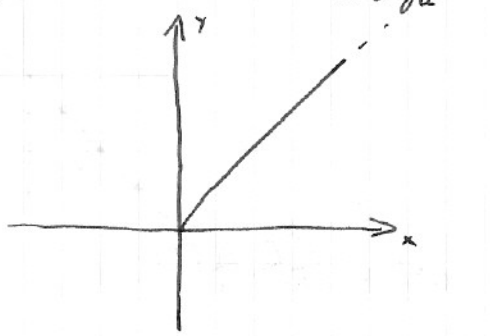
$y = K \cdot f(x)$ la funzione varia in verticale

$y = f(Kx)$ la funzione varia in orizzontale. $K>0$

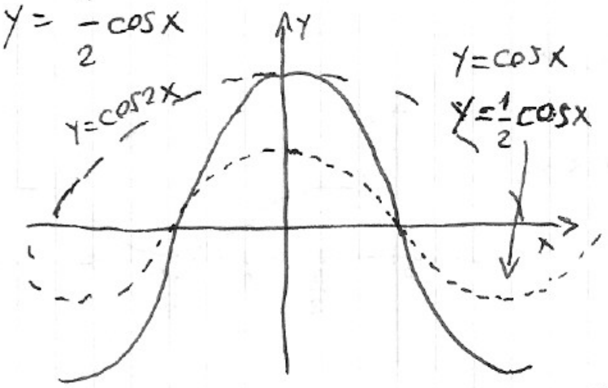
$$f(x) = \frac{10^{2\log_{10} x}}{x} \qquad D: \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad D: \mathbb{R}^+$$

$$x = a^{\log_a x} = \log_a a^x$$

$$= \frac{10^{\log_{10} x^2}}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

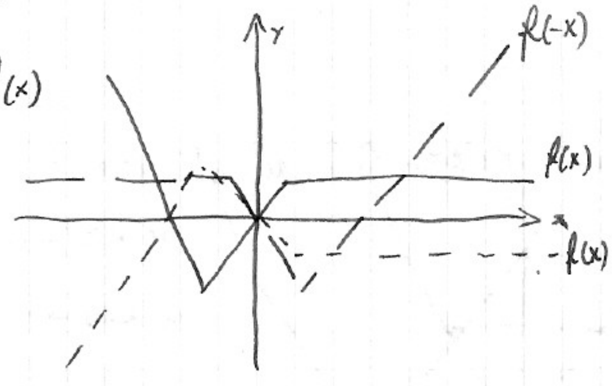


$y = \frac{1}{2}\cos x$



Se $K<0$, esempio $K=-1$

$y=-f(x)$



$-f(x)$ è la simmetrica di $f(x)$ rispetto all'asse x.

Per $f(-x)$, prendo un valore $(x=3)$, calcolo $f(3)$ e il risultato lo attribuisco a $f(-3)$. Il comportamento di $f(x)$ se $x>1$, cambio segno $-x<-1$, sarà il comportamento di $-x<-1$ nella funzione originale.

$f(-x)$ è la simmetrica rispetto all'asse y.

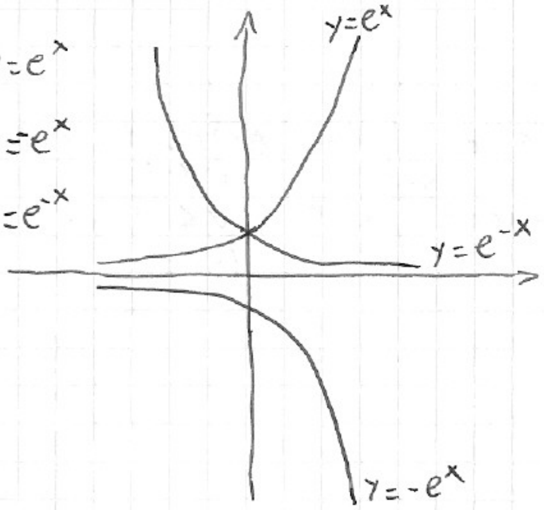
$-f(x)$ scambia i valori delle y rispetto a $f(x)$

$f(-x)$ scambia i valori delle x rispetto a $f(x)$

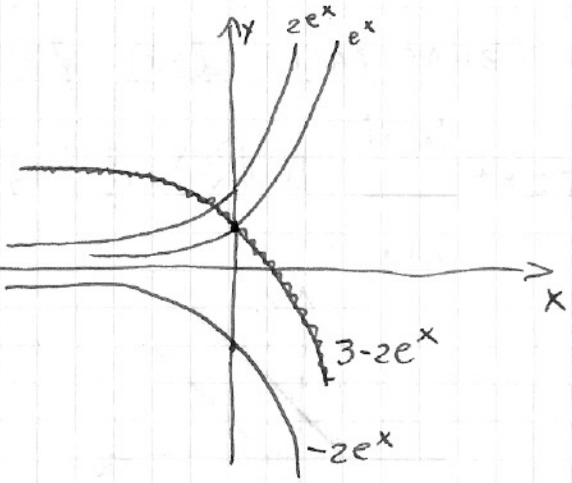
$y = e^x$

$y = -e^x$

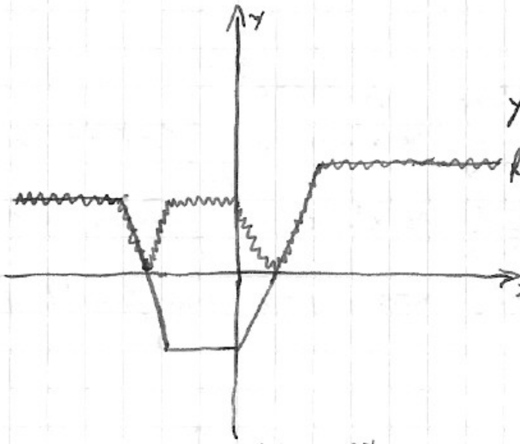
$y = e^{-x}$



$y = 3 - 2e^x$



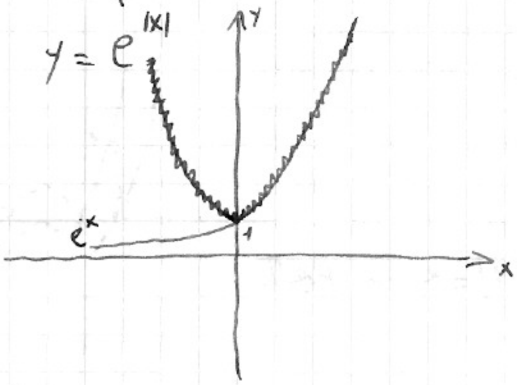
① e^x
② $2e^x$
③ $-2e^x$
④ $3-2e^x$



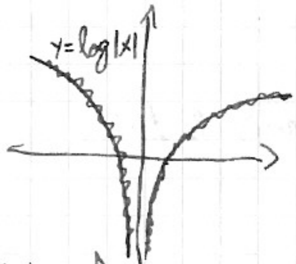
$y = |f(x)|$ $\quad y = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

Le y non possono mai essere negative

Se avessi $y = e^{|x|}$



$f(|x|)$ è una funzione pari, cioè ha il grafico simmetrico rispetto all'asse x.

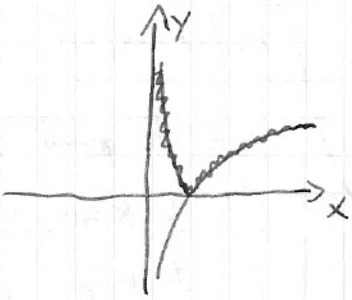


$y = \log x$

se $x = -4$
$\log -4$ ∄

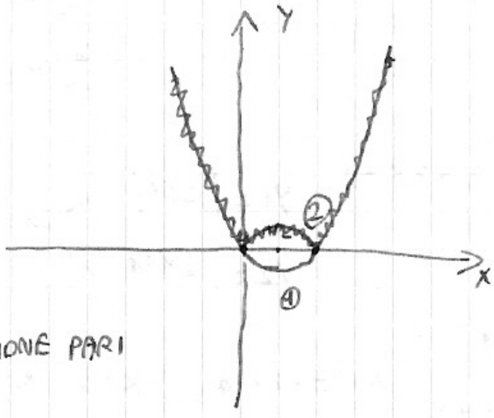
$\log|x| \Rightarrow D: x \neq 0$ $\qquad \log|-4| = \log 4$

$\log x \Rightarrow D: x > 0$



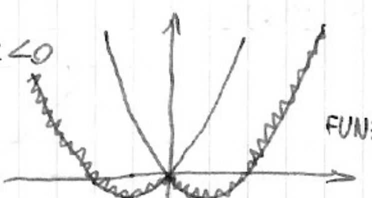
$y = |\log x|$

$y = |x^2 - x|$ $\qquad$ ① $\to y = x^2 - x$ $\qquad$ ② $y = |x^2 - x|$



$y = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$x^2 = |x|^2$



FUNZIONE PARI

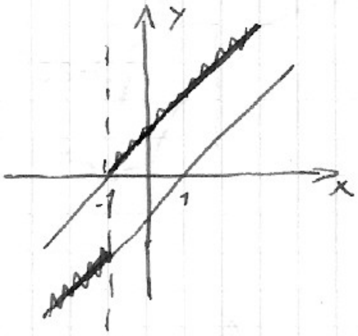
$y = |x|^2 - |x| = f(|x|)$

$f(x) = x^2 - x$

23

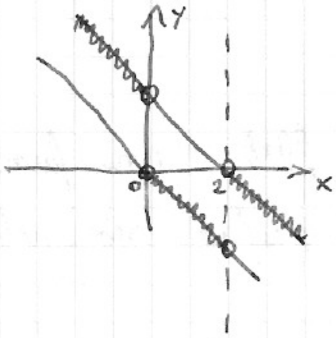
FUNZIONE PARI: $f(-x) = f(x)$

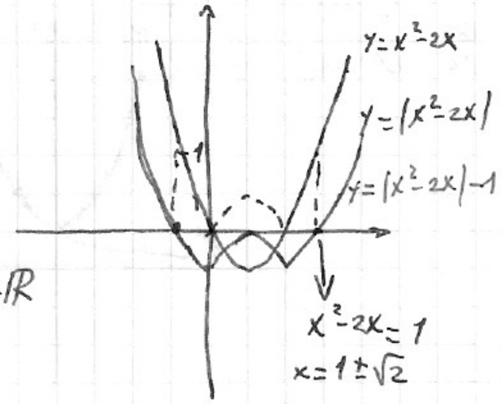
$y = x + \dfrac{|x+1|}{x+1}$ $\quad D: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad y = \begin{cases} x + \dfrac{x+1}{x+1} & \text{se } x+1 \geq 0 \\ x + \dfrac{-(x+1)}{x+1} & \text{se } x+1 < 1 \end{cases}$ $\quad y = \begin{cases} x+1 & \text{se } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq -1 \end{cases} = x > -1 \\ x-1 & \text{se } \begin{cases} x < -1 \\ x \neq -1 \end{cases} \; x < -1 \end{cases}$



$y = 1 - x + \dfrac{x^2 - 2x}{|x^2 - 2x|}$ $\quad D: \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ $\quad y = \begin{cases} 1 - x + \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x} & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ 1 - x - \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x} & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases}$ $\quad (x-2)x \geq 0$ $\quad y = \begin{cases} 1 - x + 1 & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ 1 - x - 1 & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x < 0 \vee x > 2 \\ -x & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$ l'uguale lo tolgo perché $x=0$ e $x=2$ sono fuori da D





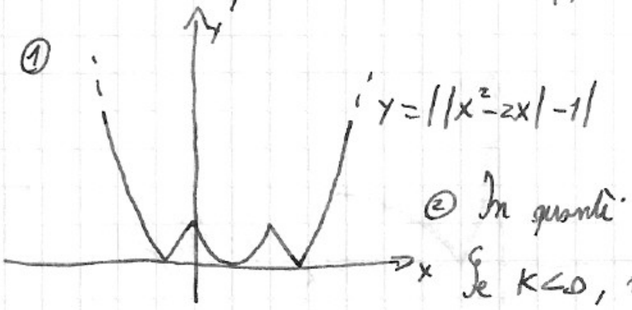
$x^2 - 2x = 1$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

$y = ||x^2 - 2x| - 1|$ ① grafico

② quante soluzioni ha $||x^2 - 2x| - 1| = k$ con $k \in \mathbb{R}$

①



② In quanti punti una retta $y = k$ incrocia la $f(x)$?

Se $k < 0$, non ho intersezioni

Se $k = 0$, 3 soluzioni

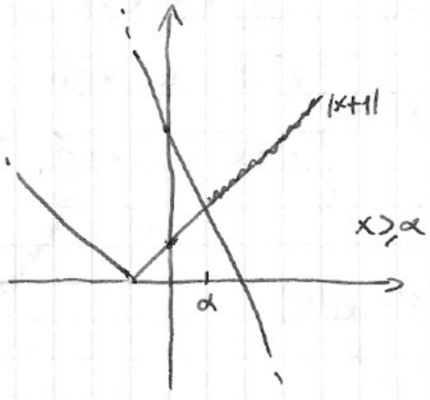
Se $0 < k < 1$, 6 soluzioni $\quad$ Se $k > 1$, 2 soluzioni

Se $k = 1$, 4 soluzioni

$|x+1| \geq -2x + 4$ $\quad \begin{matrix} y_1 = |x+1| \\ y_2 = -2x + 4 \end{matrix} \rightarrow ?\, x: y_1 \geq y_2$

$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ $\quad x + 1 = -2x + 4 \quad 3x = 3 \quad x = 1$

$\alpha = 1$ $\quad S: [1, +\infty[$

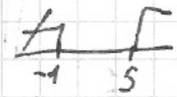


$|x+1| \geq -2x+4$ $\quad x+1 \geq -2x+4$ se $x+1 \geq 0$ $\begin{cases} 3x \geq 3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$

$x \geq 1$

o

$-(x+1) \geq -2x+4$ se $x+1<0$ $\begin{cases} -x-1 \geq -2x+4 \\ x<-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 5 \\ x<-1 \end{cases}$



$\emptyset$

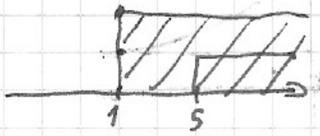
$S: [1, +\infty[$

$|A| \geq k \quad A \geq k$ o $A \leq -k$

$x+1 \geq -2x+4$ o $x+1 \leq 2x-4$

$3x \geq 3 \qquad -x \leq -5$

$x \geq 1 \qquad x \geq 5$

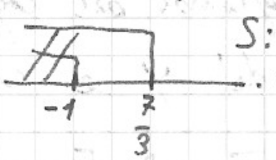


$x \geq 1$

$|A|<k \Rightarrow -k<A<k$ $\begin{cases} A>-k \\ A<k \end{cases}$ $\quad |x+1|<-3$ $\begin{cases} x+1<-3 \\ x+1>3 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-4 \\ x>2 \end{cases}$

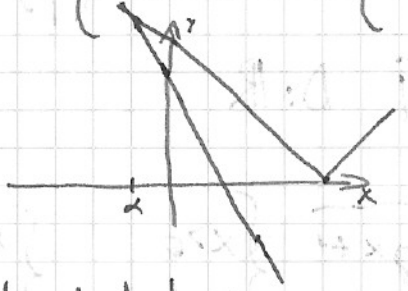
$\emptyset$ IMP.
perché $|x+1|$ è sempre ≥ 0

$|x-4|<3-2x$ $\begin{cases} x-4<3-2x \\ x-4>2x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<7 \\ -x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<\frac{7}{3} \\ x<-1 \end{cases}$



$S:]-\infty, -1[$

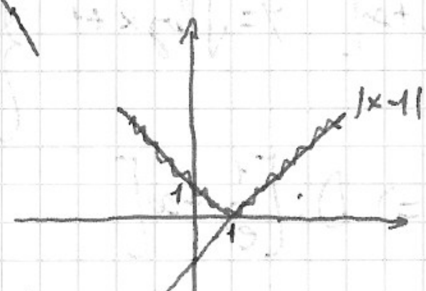
Per via grafica

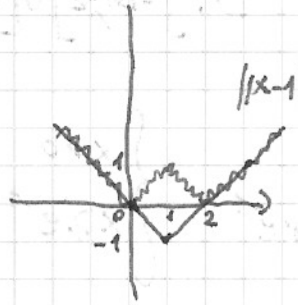


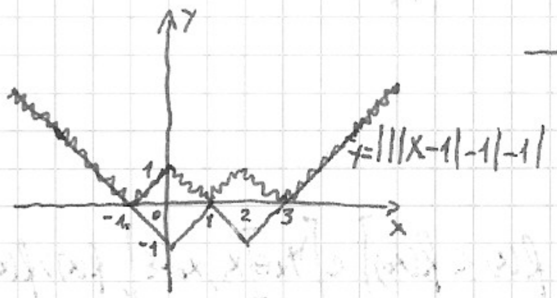
$x<\alpha$ $\quad \alpha$ è $\begin{cases} y=x-4 \\ y=3-2x \end{cases}$ $\quad -x+4=3-2x \quad x=-1=\alpha$

$x<-1$ $\qquad$ ramo a sinistra, cioè $-x+4$

Grafico di $y=\left|\left|\left|x-1\right|-1\right|-1\right|$

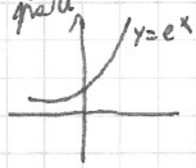


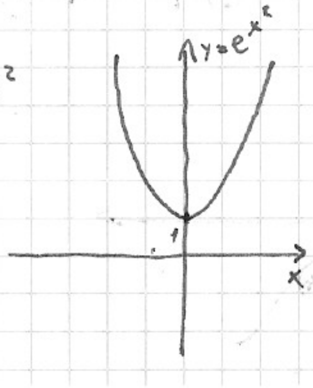




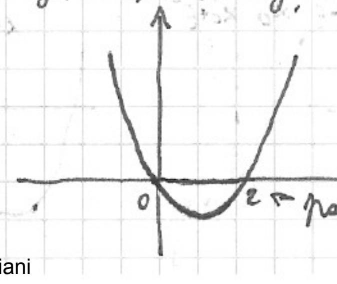
$y=e^{x^2}$ $\quad y=e^x$ o $y=x^2$

pari



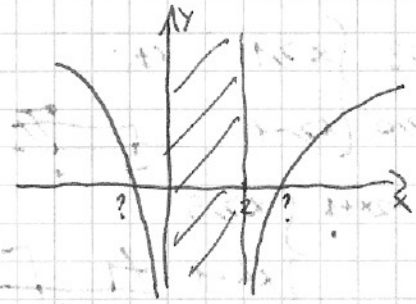


$y=\log(x^2-2x)$ $\quad y=\log x$ o $y=x^2-2x$



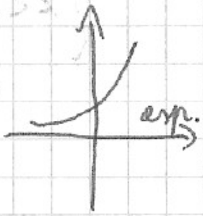
si scarta
↑
argomento >0
↑
parte negativa

24

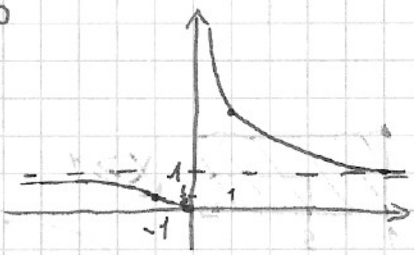


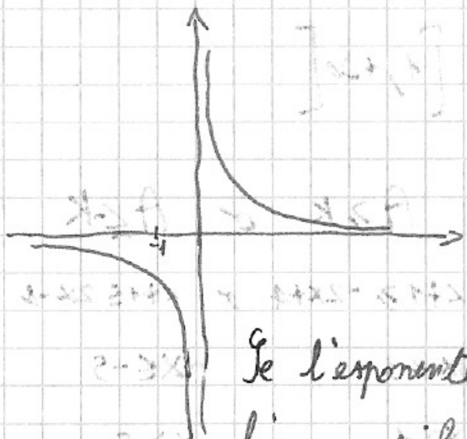
? -> $x^2-2x=1$ $\quad x=1\pm\sqrt{2}$

$y=e^{\frac{1}{x}}$ $\quad y=e^x$ $\quad y=\frac{1}{x}$ asp.



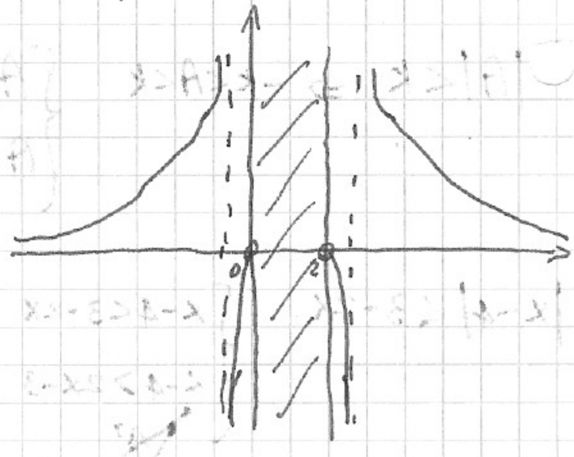
D: $x\neq 0$





Se l'esponente va vicino a 0, l'esponenziale tende a 1.

$$y=\frac{1}{\log(x^2-2x)} \quad D:\begin{cases} x^2-2x\neq 1 \\ x^2-2x>0 \end{cases} \quad \mathbb{R}\setminus\{1\pm\sqrt{2}\}\setminus[0,2]$$



A valori grandi del log, si hanno valori piccoli di y e viceversa

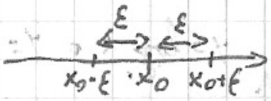
$y=\sqrt{x-2}$ $\quad D: [2,+\infty[$ $\qquad y=\sqrt{|x-2|}$ $\quad D: \mathbb{R}$

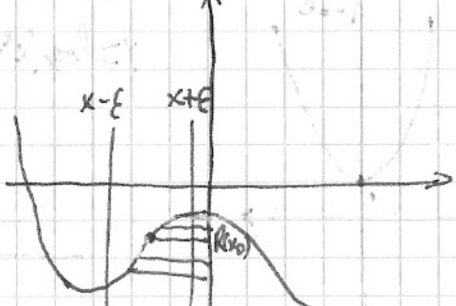
$y=\sqrt{|x|-2}$ $\quad D:]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$ $\qquad y=\sqrt{\log x+1}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ \log x+1\geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ \log x\geq -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x>0 \\ \log x\geq \log e^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ x\geq e^{-1} \end{cases} \Rightarrow D: \left[\frac{1}{e},+\infty\right[$$

MONOTONIA

$x_0\in D$ $\quad y=f(x)$ è crescente $\Rightarrow \exists\,\varepsilon>0 : \left[\forall x\in[x_0-\varepsilon, x_0[,\ f(x)<f(x_0)\right]$ e $\left[\forall x\in]x_0, x_0+\varepsilon],\ f(x)>f(x_0)\right]$





$x_0 \in D$ $y=f(x)$ è decrescente $\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 \left[\forall x \in \left[x_0-\varepsilon, x_0\right[, f(x)>f(x_0)\right]$ e $\left[\forall x \in \left]x_0, x_0+\varepsilon\right], f(x)<f(x_0)\right]$

Se avessi $\geq$ e $\leq$, $f(x)$ sarebbe strettamente crescente o decrescente.

MONOTONA $\rightarrow$ $f(x)$ crescente o decrescente

$f(x)$ dec. in I $\forall x_1, x_2 \in I : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

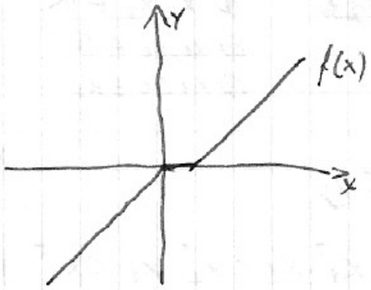
$f(x)$ crescente in I $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

$\Downarrow$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ f iniettiva

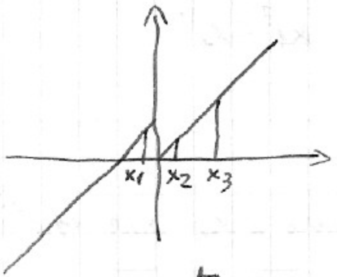
Una funzione strettamente monotona è iniettiva.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\leq 0 \quad \text{str. crescente} \\ 0 & \text{se } 0<x\leq 1 \quad \text{debolmente cresc.} \\ x-1 & \text{se } x>1 \quad \text{str. crescente} \end{cases}$$



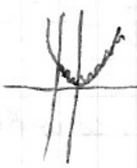
$f(x)$ è debolmente crescente, cioè $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\leq 0 \\ x & \text{se } x>0 \end{cases}$$



non è monotona perché $x_1<x_2$ ma $f(x_1)>f(x_2)$ e $x_2<x_3$ ma $f(x_2)<f(x_3)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\geq -2 \\ -x & \text{se } x<2 \end{cases} \rightarrow \text{non monotona.}$$



① controllo che le funzioni parziali siano monotone

② controllo che i domini parziali non si intersechino o siano "ordinati"

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x_1) & \text{se } x_1\in D_1 \\ f_2(x_2) & \text{se } x_2 \in D_2 \end{cases}$$

① f_1 in D_1 $\rightarrow$ crescente (o decr) se sì, passo 2

② f_2 in D_2 ? è crescente (o decr) se sì, passo 3

③ $f_1(D_1) < f_2(D_2)$ tutte le immagini di D_2 devono essere maggiori di D_1. se sì è monotona

Verificare che $y=\frac{1}{x}$ è decr. in R^+, decr. in R^- e non decr in $R \setminus \{0\}$

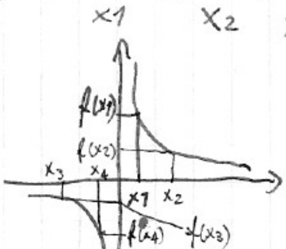
R^+ $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}$

$\hookrightarrow 1>\frac{x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1}{x_2}>\frac{1}{x_1}$ ⟶ verificato

R^- $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}$

$\hookrightarrow 1<\frac{x_2}{x_1}$ perché num. negativi $\rightarrow \frac{1}{x_2}>\frac{1}{x_1}$

R :



$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \rightarrow$ decr.

$x_3<x_4 \Rightarrow f(x_3)>f(x_4) \rightarrow$ decr.

$x_3<x_1 \Rightarrow f(x_3)<f(x_1) \rightarrow$ crescente

$\Big]\rightarrow$ non monotona in R

25

$f(x)=x^2$ crescente in R^+
decrescente in R^-

R^+ $x_1<x_2 \overset{?}{\rightarrow} x_1^2<x_2^2$

$x_1<x_2 \rightarrow (x_1-x_2)<0$ moltiplico per (x_1+x_2) che è positivo

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0 \quad x_1^2-x_2^2<0 \quad x_1^2<x_2^2$ VERIF.

R^- $x_1<x_2 \overset{?}{\rightarrow} x_1^2>x_2^2$

$x_1-x_2<0 \rightarrow x_1+x_2$ è minore di 0, quindi cambio verso $(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0 \quad x_1^2>x_2^2$ VERIF.

$f(x)=x^3$ dim. che è crescente su $\mathbb{R}$ ⊛ $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Spezziamo in 3 pezzi
① $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$
② $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$
③ $x_1 \le 0 \le x_2$

① $x_1<x_2 \overset{?}{\rightarrow} x_1^3>x_2^3$

$\hookrightarrow x_1^2<x_2^2$ come dimostrato in precedenza

$x_1^3=x_1^2\cdot x_1<x_1^2\cdot x_2<x_2^2\cdot x_2=x_2^3 \quad x_1^3<x_2^3$

② $x_1<x_2$

$x_1^2>x_2^2$ come dimostrato

moltiplico per $x_1<0$ $\quad x_1^2\cdot x_1<x_2^2\cdot x_1<x_2^2\cdot x_2 \quad x_1^3<x_2^3$

③ se $x_1=0$ e $x_2>0$ $\quad x_1^3=0<x_2^3\rightarrow>0$

lo stesso per $x_1<0$ e $x_2=0$ $\qquad x_1$ non può essere $=x_2$ per ipotesi ⊛

$f(x)=\mathrm{sen}\left(x-\sqrt{1-2x}\right) \qquad D: 1-2x\ge 0 \quad -2x\ge -1 \quad x\le \frac{1}{2} \quad D: \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$y=\mathrm{sen}\,x \xrightarrow{\text{inversa}} y=\mathrm{arcsen}\,x$ per essere invertibile, considero l'intervallo

parte dall'arco e mi dà il seno — parte dal seno e mi dà l'arco

$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, così la funzione è biunivoca.

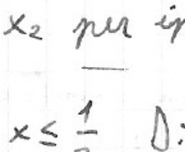
Potevo anche scegliere $x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, ma per convenzione si sceglie $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y=\mathrm{arcsen}\,x: \underbrace{[-1,1]}_{D}\rightarrow\underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{C}$

$3\,\mathrm{sen}^2x+\mathrm{sen}\,x=0 \qquad \mathrm{sen}\,x(3\,\mathrm{sen}\,x+1)=0$

$\mathrm{sen}\,x=0 \quad x=k\pi$

$\mathrm{sen}\,x=-\frac{1}{3}$



$x=\mathrm{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi$

$x=\pi-\mathrm{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi$

meno perché $\mathrm{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)$ è negativo

$y=\cos x \xrightarrow{\text{inversa}} y=\arccos x: [-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$

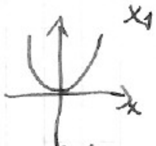
$y=\mathrm{tg}\,x \xrightarrow{\text{inversa}} y=\mathrm{arctg}\,x: \mathbb{R}\longrightarrow\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

FUNZIONE PARI: $f(x)$ pari: $f(-x)=f(x)$ grafico simmetrico rispetto asse y

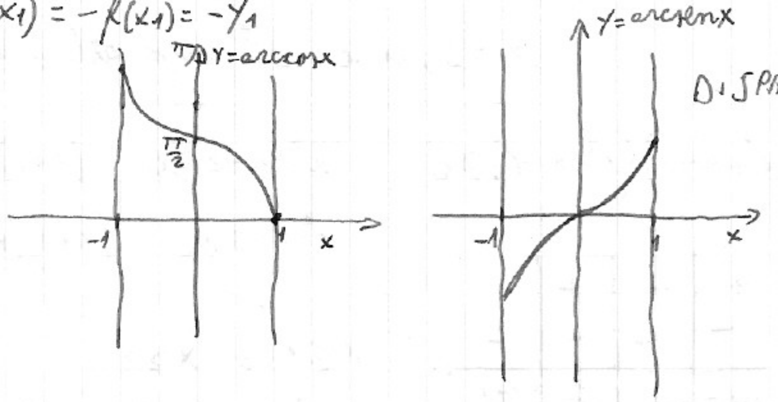
FUNZIONE DISPARI: $f(x)$ dispari: $f(-x)=-f(x)$ grafico simmetrico rispetto all'origine

$x_1 = y_1 = f(x_1)$ e $f(-x_1) = -f(x_1) = -y_1$

PARI: $y = x^{2n}$



$y = \cos x$ infatti $\cos x = \cos(-x)$



$f_1(x) = \dfrac{5}{3x}$ $\quad f_2(x) = x^3 - 2x^5$ $\quad f_3(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+2}$

① se pari $f(-x)=f(x)$ $\quad f(-x) = \dfrac{5}{3(-x)}$ $\quad f(-x) = -\dfrac{5}{3x} = -f(x)$ DISPARI

② $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^5$ $\quad f(-x) = -x^3 + 2x^5 = -f(x)$ DISPARI

③ $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^3+2}$ $\quad f(-x) = \dfrac{x^2-1}{-x^3+2}$ NÉ PARI NÉ DISPARI

Se sommo, moltiplico o divido tra loro due funzioni pari ottengo una funzione pari

Se sommo funzioni dispari, ottengo una funzione dispari.

Se moltiplico o divido tra loro due funzioni dispari ottengo una funzione pari.

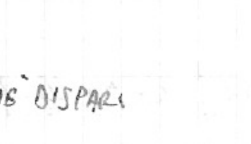
$P/D = D$ $\quad D/P = D$ $\quad y = k$ è pari

DISEQUAZIONI

$x^2 - 15x + 16 > 0$

$x^2 - 15x + 16 = 0$

$x = \dfrac{15 \pm \sqrt{225-64}}{2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{161}}{2}$



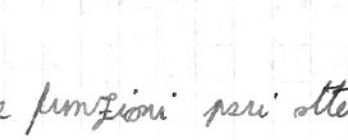
$x < \dfrac{15-\sqrt{161}}{2}$ o $x > \dfrac{15+\sqrt{161}}{2}$

$(x+2)(x-2)(x-3) < 0$

$x+2 > 0 \quad x > -2$

$x-2 > 0 \quad x > 2$

$x-3 > 0 \quad x > 3$



$x < -2$ o $2 < x < 3$

(26)

$\frac{(x+2)(x-2)}{x-3}<0$ stesse soluzioni di prima $x<-2$ o $2<x<3$.

Se fosse stato ≤ 0, avremmo accettato anche $x=\pm 2$, ma non $x=3$, come nel caso del prodotto.

$(x^2+x-2)(x^2-x-6)\ge 0$

$x^2+x-2\ge 0$ $\quad (x+2)(x-1)\ge 0$ $\quad x=1$, $x=-2$ $\quad x\le -2$ o $x\ge 1$

$x^2-x-6\ge 0$ $\quad (x+2)(x-3)\ge 0$ $\quad x=-2$, $x=3$ $\quad x\le -2$ o $x\ge 3$

	-2		1		3	
+		−		+		+
+		−		−		+
⊕		⊕		⊖		⊕

$x\le 1$ o $x\ge 3$

$x\in\,]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

$2x^3+3x^2-2x-3>0$ $\quad x^2(2x+3)-1(2x+3)>0$ $\quad (2x+3)(x^2-1)>0$

$2x+3>0$ $\quad x>-\frac{3}{2}$

$x^2-1>0$ $\quad x=\pm 1$ $\quad x<-1$ o $x>1$

	$-\frac{3}{2}$		-1		1	
−		+		+		+
+		+		−		+
⊖		⊕		⊖		⊕

$-\frac{3}{2}<x<-1$ o $x>1$

$x\in\,]-\frac{3}{2},-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

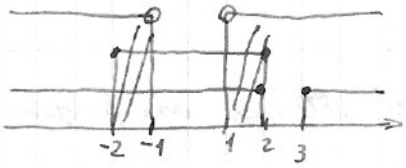
$\begin{cases}1<x^2\le 4\\ x^2-5x+6\ge 0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x^2>1\\ x^2\le 4\\ (x-2)(x-3)\ge 0\end{cases}$

$x=\pm 1$ $\quad x<-1 \vee x>1$

$x=\pm 2$ $\quad -2\le x\le 2$

$x=2$, $x=3$ $\quad x\le 2 \vee x\ge 3$

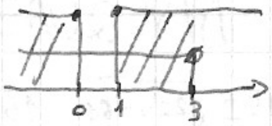
$\begin{cases}x<-1 \text{ o } x>1\\ -2\le x\le 2\\ x\le 2 \text{ o } x\ge 3\end{cases}$



$-2\le x<-1$ o $1<x\le 2$

$x\in[-2,-1[\,\cup\,]1,2]$

$\begin{cases}x^2\ge x\\ x+3<9-x\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x(x-1)\ge 0\\ 2x<6\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x\le 0 \vee x\ge 1\\ x<3\end{cases}$



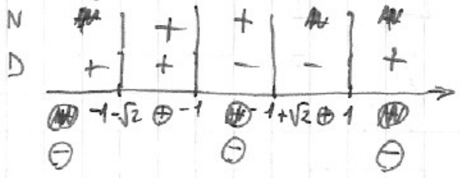
$x\le 0 \vee 1\le x<3$

$x\in\,]-\infty,0]\cup[1,3[$

$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}<2$ $\quad \frac{(x-1)^2-(x+1)^2-2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}<0$ $\quad$ C.E. $x\ne\pm 1$

$N>0$ $\quad \cancel{x^2}-2x\cancel{+1}-\cancel{x^2}-2x\cancel{-1}-2x^2+2>0$ $\quad 2x^2+4x-2<0$ $\quad x^2+2x-1<0$ $\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+1}}{1}=-1\pm\sqrt{2}$

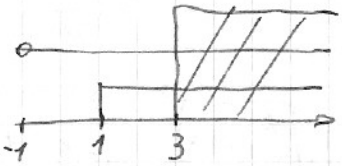
$D>0$ $\quad (x+1)(x-1)>0$ $\quad x<-1 \vee x>1$ $\quad -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$



$x < -1-\sqrt{2} \ \vee \ -1 < x < -1+\sqrt{2} \ \vee \ x > 1$

$x \in \left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right[\cup \left]-1, -1+\sqrt{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

$$\begin{cases} \dfrac{-5\pi}{3-x} \geq 0 \\ \dfrac{(x+1)^2}{3^{1/2}} > 0 \\ \dfrac{3-\pi}{x-1} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3-x < 0 \\ (x+1)^2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3 \\ x \neq -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

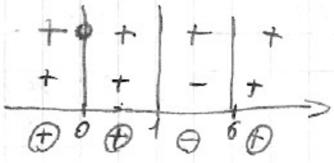


$x > 3$

$x \in \left]3, +\infty\right[$

$x^4 - 7x^3 + 6x^2 > 0 \qquad x^2(x^2 - 7x + 6) > 0 \qquad \mathrm{I} \ x^2 > 0 \quad x \neq 0$

$\mathrm{II} \ (x-1)(x-6) > 0 \quad x = 1 \ \text{o} \ x = 6$  $x < 1 \ \text{o} \ x > 6$



$x < 0 \ \text{o} \ 0 < x < 1 \ \text{o} \ x > 6$

Fosse stata ≤ 0, $1 \leq x \leq 6$ o $\boxed{x=0}$ → occhio a non perderla

EQUAZIONI IRRAZIONALI

$a = b \Longleftrightarrow a^3 = b^3 \qquad a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ non vale il viceversa

$\sqrt[3]{x} = 7 \quad x = 7^3$

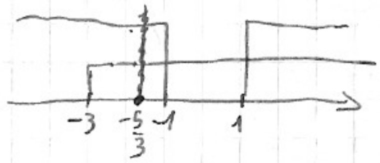
$\sqrt{x} = 7 \longrightarrow (\sqrt{x})^2 = (7)^2$

$x \geq 0$ membri concordi

$\sqrt{x^2-1} = x+3$

positivo — deve essere positivo per

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x+3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -1 \ \text{o} \ x \geq 1 \\ x \geq -3 \\ \cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} + 6x + 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -1 \ \text{o} \ x \geq 1 \\ x \geq -3 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$



$x = -\dfrac{5}{3}$

$\sqrt{x^2 - x + 2} + 3x = 2(x+1) \qquad \sqrt{x^2 - x + 2} = -x + 2$

C.E.

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 \geq 0 \\ -x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} =$ MAI $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

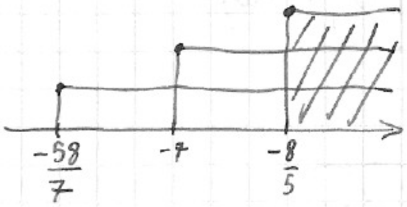
$\cancel{x^2} - x + 2 = \cancel{x^2} + 4 - 4x$

$3x = 2 \quad x = \dfrac{2}{3}$ ACC.

27

$$\sqrt{\frac{5}{2}x+4}+\sqrt{x+7}=\sqrt{\frac{7}{2}x+29}$$

C.E. $\begin{cases} \frac{5}{2}x+4\geq 0 \\ x+7\geq 0 \\ \frac{7}{2}x+29\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -\frac{8}{5} \\ x\geq -7 \\ x\geq -\frac{58}{7} \end{cases}$



$x\geq -\frac{8}{5}$

CONC. SEGNI → sempre non negativo

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}x+4}+\sqrt{x+7}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{7}{2}x+29}\right)^2 \qquad \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}x+4+\cancel{x}+7+2\sqrt{\left(\frac{5}{2}x+4\right)(x+7)}=\frac{7}{\cancel{2}}x+29$$

$$2\sqrt{\frac{5}{2}x^2+\frac{35}{2}x+4x+28}=18 \qquad \sqrt{\frac{5}{2}x^2+\frac{43}{2}x+28}=9 \qquad \frac{5}{2}x^2+\frac{43}{2}x+28=81$$

radice sicuramente esistente e positiva

$$5x^2+43x-106=0 \qquad x=\frac{-43\pm\sqrt{1849+2120}}{10}=\frac{-43\pm\sqrt{3969}}{10}=\frac{-43\pm 63}{10}=\begin{cases} -\frac{106}{10} & \text{NON ACC.} \\ 2 & \text{ACC PERCHÉ } 2>-\frac{8}{5} \end{cases}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$a>b \Leftrightarrow a^3>b^3$ $\Updownarrow$ $\sqrt{a^3}>\sqrt{b^3}$

x^2: $a,b>0$ $\quad a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$

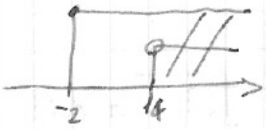
$(a,b<0 \quad a>b \Leftrightarrow a^2<b^2)$ posso cambiare i segni e cambiare il segno

$a<0<b$ non posso elevare a potenza

① $\sqrt{x+2}>4$

segni concordi e positivi

C.E. $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+2>16 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -2 \\ x>14 \end{cases}$



$x>14$

② $\sqrt{x+2}>-4$

C.E $x+2\geq 0 \quad x\geq -2$

$+>-$ sempre vera

③ $\sqrt{x+2}<-4$ C.E. $x+2\geq 0$

$+<-$ mai vera <u>impossibile</u>

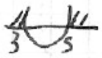
④ $\sqrt{x+2}>x$

$\sqrt{\ }>$ pos. C.E $\begin{cases} (x+2\geq 0) \\ x\geq 0 & \text{segni} \\ \underbrace{x+2>x^2}_{>0 \text{ perché } x^2\geq 0} & \text{elevo al q.} \end{cases}$ o $\sqrt{\ }>$ neg. $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x<0 \end{cases}$

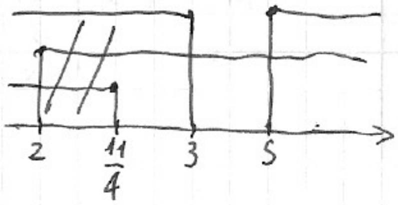
$\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x-2<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq -2 \\ x<0 \end{cases}$ ...

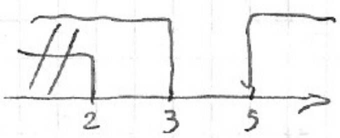
⑤ $\sqrt{x+2}<x$ $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+2<x^2 \end{cases} \cup$ $\sqrt{\ }<$ neg $\begin{cases} \cancel{x+2\geq 0} \\ \cancel{x\leq 0} \end{cases}$

$\sqrt{x^2-8x+15} \geq x-2$ $\quad \begin{cases} x^2-8x+15 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x^2-8x+15 \geq (x-2)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-8x+15 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-3)(x-5) \geq 0 \\ x \geq 2 \\ \cancel{x^2}-8x+15-\cancel{x^2}-4+4x \geq 0 \end{cases}$ $\quad x=3 \quad x=5$  $\cup \begin{cases} (x-3)(x-5) \geq 0 \\ x<2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 3 \text{ o } x \geq 5 \\ x \geq 2 \\ -4x \geq -11 \quad x \leq \frac{11}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 3 \text{ o } x \geq 5 \\ x<2 \end{cases}$





$\left[2, \frac{11}{4}\right] \cup \left]-\infty, 2\right[$

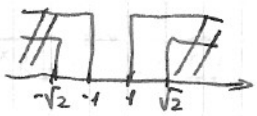
$S: \left]-\infty, \frac{11}{4}\right]$

$\sqrt[3]{x^3+2} > x-1 \qquad x^3+2 > (x-1)^3 \qquad \cancel{x^3}+2 > \cancel{x^3}-1-3x^2+3x \qquad 3x^2-3x+3>0$

$x^2-x+1>0 \qquad x^2-x+1=0 \qquad x=\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \emptyset \qquad S=\mathbb{R}$

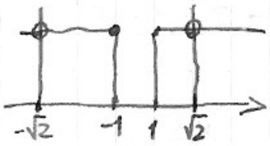
$\frac{3-x}{\sqrt{x^2-1}-1} < 0 \qquad N>0 \quad 3-x>0 \quad x<3$

$D>0 \quad \sqrt{x^2-1}-1>0 \quad \sqrt{x^2-1}>1 \qquad \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1>1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x>1 \\ x<-\sqrt{2} \text{ o } x>\sqrt{2} \end{cases}$



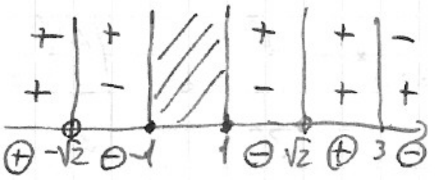
C.E.

$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1}-1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x^2-1 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$



$N>0 \quad x<3$

$D>0 \quad x<-\sqrt{2} \text{ o } x>\sqrt{2}$



$S = \left]-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

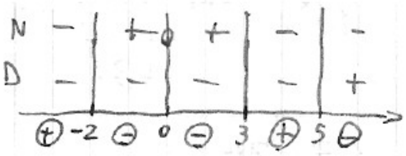
$\frac{(x+2)(3-x)}{x^2(x-5)} \geq 0$

C.E.

$\begin{cases} x \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$

$N \geq 0 \quad (x+2)(3-x) \geq 0 \quad x=-2 \quad x=3$ $-2 \leq x \leq 3$

$D>0 \quad x^2(x-5)>0 \quad x-5>0 \quad x>5$



$S = \left]-\infty, -2\right] \cup \left[3, 5\right[$

28

$$\frac{x^2(x-5)}{(x+2)(3-x)} \geq 0 \qquad F>0$$

$x+2>0 \quad x>-2$

$3-x>0 \quad x<3$

$x^2>0 \quad x\neq 0$

$x-5>0 \quad x>5$

−	+	+	+	+
+	+	+	−	−
+	+ 0	+	+	+
−	−	−	−	+
⊕	−2 ⊖	0 ⊖	3 ⊕	5 ⊖

$F>0 \quad x<-2 \quad o \quad 3<x<5$

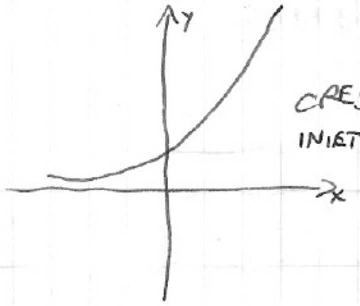
$F=0 \quad x^2=0 \quad o \quad x-5=0$

$x=0 \quad o \quad x=5$

$$S: \left]-\infty,-2\right[\cup \left]3,5\right] \cup \underline{\underline{\{0\}}}$$

$y=e^x \qquad y=a^x \quad a>1$

$y=b^x \quad 0<b<1 \iff y=\left(\frac{1}{b}\right)^{-x} \quad 1/b>1$



CRESCENTE

INIETTIVA $\rightarrow a^{x_1}=a^{x_2} \Downarrow x_1=x_2$

$a^x>1 \iff x>0$

$a^x=1 \iff x=0$

$0<a^x<1 \iff x<0$

$a^{x_1}>a^{x_2} \iff x_1>x_2$

$5^{x+2}>1 \iff x+2>0 \quad x>-2$

PROPRIETÀ POTENZE

$a^{x+y}=a^x\cdot a^y \qquad a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$

$a^{x\cdot y}=\left(a^x\right)^y$

$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \forall m,n\in\mathbb{N}$

$4^x:\sqrt{2}=2^{x+1}\cdot\sqrt{8^x} \qquad 2^{2x}:2^{\frac{1}{2}}=2^x\cdot 2\cdot 2^{\frac{3x}{2}} \qquad 2^{2x-\frac{1}{2}}=2^{x+1+\frac{3x}{2}} \qquad 2x-\frac{1}{2}=x+1+\frac{3x}{2}$

$4x-1-2x-2-3x=0 \qquad -x=3 \qquad x=-3$

$10^x=100 \qquad x=2$

$4^x=2\cdot 3^x \qquad \frac{4^x}{3^x}=2 \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^x=2 \qquad x=\log_{\frac{4}{3}}2$

$9^x-3^x-5=0 \qquad 3^{2x}-3^x-5=0 \qquad 3^x=t \qquad t^2-t-5=0 \qquad t=\frac{1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

$3^x=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \iff x=\log_3\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$3^x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}<0$ IMPOS.

$7^x=1 \qquad x=0$

$4^x=3 \qquad x=\log_4 3$

$10^x=3^{x+1} \qquad \left(\frac{10}{3}\right)^x=3$

$x=\log_{\frac{10}{3}}3$

$3^{x+1}+3^{x+2}=108 \quad 3\cdot 3^x+9\cdot 3^x=108 \quad 3^x+3\cdot 3^x=36 \quad 4\cdot 3^x=36 \quad 3^x=9 \quad x=2$

$3^x>9^{x+1} \quad 3^x>3^{2x+2} \quad x>2x+2 \quad -x>2 \quad x<-2$

$4\cdot 2^x+9\cdot 2^{-x}>12 \quad 4\cdot 2^x+\frac{9}{2^x}>12 \quad 2^x=y \quad 4y+\frac{9}{y}>12 \quad 4y^2-12y+9>0$

$(2y-3)^2>0 \quad 2y-3\neq 0 \quad y\neq \frac{3}{2} \quad 2^x\neq\frac{3}{2} \quad x\neq \log_2\frac{3}{2}$

$\frac{2^x(3\cdot 2^x-5)+2}{1-3^x}>0 \qquad N>0 \quad 3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2>0 \quad 2^x=t \quad 3t^2-5t+2>0 \quad t=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}=\left\langle\begin{matrix}1\\ \frac{2}{3}\end{matrix}\right.$

$\frac{2}{3} \quad 1 \qquad t<\frac{2}{3} \text{ o } t>1$

C.E. $1-3^x\neq 0$
$x\neq 0$

$2^x<\frac{2}{3}$ o $2^x>1$

$x<\log_2\frac{2}{3}$ o $x>0$

NEG.

$\boxed{\frac{0}{0} \text{ NON ESISTE}}$

$D>0 \quad 1-3^x>0 \quad -3^x>-1 \quad 3^x<1 \quad x<0$

N	+	−	+
D	+	+	−
	⊕ $\log_2\frac{2}{3}$	⊖ 0	⊖

$S=\left]-\infty,\log_2\frac{2}{3}\right[$

$e^{3x^2-5x+2}>1 \quad 3x^2-5x+2>0 \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}=\left\langle\begin{matrix}1\\ \frac{2}{3}\end{matrix}\right. \quad \frac{2}{3} \quad 1$

$x<\frac{2}{3}$ o $x>1$

$y=\log_a x \quad a>1$

monotona crescente argomento >0

$D:\mathbb{R}^+ \quad C:\mathbb{R}$

$\log_a x=0 \iff x=1$

$\log x>0 \iff x>1$

$\log x<0 \iff 0<x<1$

PROPRIETÀ LOGARITMI

$\log(a\cdot b)=\log a+\log b \qquad \log\sqrt[n]{a^p}=\log a^{\frac{p}{n}}=\frac{p}{n}\cdot\log a$

$\log(a:b)=\log a-\log b$ AMMESSO CHE ESISTANO

$\log a^n=n\cdot\log a$ TUTTI I LOGARITMI! $\log(6)=\log[(-2)(-3)]=\log(-2)+\log(-3)$ NO

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$

(29)

$4^x = 2\cdot 3^x \quad \log_e 4^x = \log_e 2\cdot 3^x \quad x\cdot \log_e 4 = \log_e 2 + \log_e 3^x \quad x\ln 4 = \ln 2 + x\ln 3$

$x = \dfrac{\ln 2}{\ln 4 - \ln 3}$ $\quad \boxed{h = e^{\log_e h} = \log_e e^h}$

$\log_3 x = 3 \quad x = 3^3 = 27$

$S = \{1\}$

$\log_3 x = \log_3 2 - \log_3(x+1) \quad x = \dfrac{2}{x+1} \quad x^2 + x - 2 = 0$

$\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

$x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} -2 & \text{NON ACC.} \\ 1 & \text{ACC.} \end{cases}$

$\log_2 x + \log_4 x = 3$ C.E. $x>0$

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3 \quad 2\log_2 x + \log_2 x = 6 \quad \log_2 x = 2 \quad x = 2^2 = 4$ ACCETTABILE

$(\log_2 x)\cdot(\log_3 x) = 1 \quad \log_2 x \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} = 1 \quad \log_2^2 x = \log_2 3$

C.E. $x>0$

$\log_2 x = \pm\sqrt{\log_2 3} \quad x = 2^{\pm\sqrt{\log_2 3}}$

$\dfrac{\log\left(2\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3\cdot 3^{\frac{1}{2x}}\right)}{\log\left(1+2\cdot 9^{\frac{1}{4x}}\right)} = 1$ argomenti sempre positivi $\quad 2\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3\cdot 3^{\frac{1}{2x}} > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$1+2\cdot 9^{\frac{1}{4x}} > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\log\left(1+2\cdot 9^{\frac{1}{4x}}\right) \neq 0 \quad 1+2\cdot 9^{\frac{1}{4x}} \neq 1 \quad 9^{\frac{1}{4x}} \neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Se la frazione viene uno, vuol dire che

$\log\left(2\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3\cdot 3^{\frac{1}{2x}}\right) = \log\left(1+2\cdot 9^{\frac{1}{4x}}\right) \quad 2\cdot 3^{1/x} + 3\cdot 3^{1/2x} = 1+2\cdot 3^{1/4x}$ C.E. $x\neq 0$

$2\cdot 3^{\left(\frac{1}{2x}\right)^2} + 3\cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 1 + 2\cdot 3^{\frac{2}{4x}\frac{1}{2x}}$ $\quad 3^{\frac{1}{2x}} = y \quad 2y^2 + 3y = 1 + 2y \quad 2y^2 + y - 1 = 0$

$y = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 & \text{NON ACC.} \end{cases}$

$3^{\frac{1}{2x}} = \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{2x} = \log_3 \dfrac{1}{2} = \log_3 2^{-1} = -\log_3 2$

$2x = -\dfrac{1}{\log_3 2}$ cambio base e argomento $= -\log_2 3 \quad x = -\dfrac{\log_2 3}{2} = \log_2 3^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\log(3x^2-5x+2) < \log(x-1)$ C.E. $\begin{cases} 3x^2-5x+2>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{6} = \dfrac{5\pm 1}{6} = \begin{cases} 1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x<\frac{2}{3} \text{ o } x>1 \\ x>1 \end{cases}$ C.E.: $x>1$

$3x^2-5x+2<x-1 \quad 3x^2-6x+3<0 \quad x^2-2x+1<0 \quad (x-1)^2<0$ MAI! $S=\emptyset$

Fosse stato $\leq$ sarebbe $(x-1)^2\leq 0 \quad x-1=0 \quad x=1$ NON ACC. x C.E. $S=\emptyset$

$\log(x^2-4)<\log(3x^2-5x+2)-\log(x-1)$ C.E. $\begin{cases} x^2-4>0 \\ 3x^2-5x+2>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-2 \text{ o } x>2 \\ x<\frac{2}{3} \text{ o } x>1 \\ x>1 \end{cases}$ C.E. $\boxed{x>2}$

$x^2-4<\dfrac{3x^2-5x+2}{x-1}$ $x-1>0$ per C.E

$(x^2-4)(x-1)<(3x-2)(x-1) \quad x^2-4<3x-2 \quad x^2-3x-2<0 \quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

perché positivo posso toglierlo

$\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow 2<x<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

SCOMPOSIZIONE

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

se ho due soluzioni x_1 e x_2

$=a(x-x_1)(x-x_2)$

Nel caso di base minore di 1 diventa

$0<a<1$

$a^{x_1}>a^{x_2} \Rightarrow x_1<x_2$

$\log_a x_1>\log_a x_2 \Rightarrow x_1<x_2$

$\log x+\log_x e-2=0$ C.E. $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\log x+\dfrac{1}{\log x}-2=0$

MAI 0

$\log x\neq 0 \quad x\neq 1$

$\log^2 x-2\log x+1=0 \quad (\log x-1)^2=0 \quad \log x=1 \quad x=e$ ACC.

$\log_3\log_{\frac{1}{3}}(1+3x)>0 \quad \begin{cases} 1+3x>0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(1+3x)>0 \end{cases} \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ 1+3x<1 \end{cases} \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ x<0 \end{cases} \quad -\frac{1}{3}<x<0$

$\log_{\frac{1}{3}}(1+3x)>1 \quad \log_{\frac{1}{3}}(1+3x)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \quad 1+3x<\frac{1}{3} \quad 3x<-\frac{2}{3} \quad x<-\frac{2}{9}$

comprende già argomento >0 $\rightarrow$ C.E.: $x>-\dfrac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ x<-\frac{2}{9} \end{cases} \quad -\frac{1}{3}<x<-\frac{2}{9} \leftarrow$ SOLUZIONE

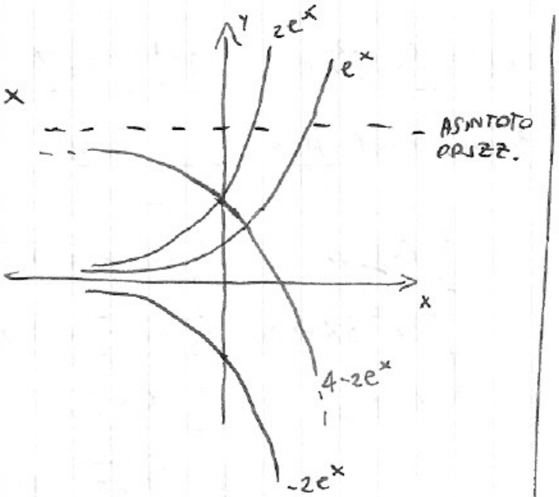
DOMINIO

$y=\arcsin\sqrt{3-x} \quad \begin{cases} 3-x\geq 0 \\ -1\leq\sqrt{3-x}\leq 1 \end{cases} \begin{cases} x\leq 3 \\ \sqrt{3-x}\leq +1 \\ \sqrt{3-x}\geq -1 \end{cases} \begin{cases} x\leq 3 \\ \text{SEMPRE} \\ 3-x\leq 1 \end{cases} \begin{cases} x\leq 3 \\ x\geq 2 \end{cases} \quad 2\leq x\leq 3$

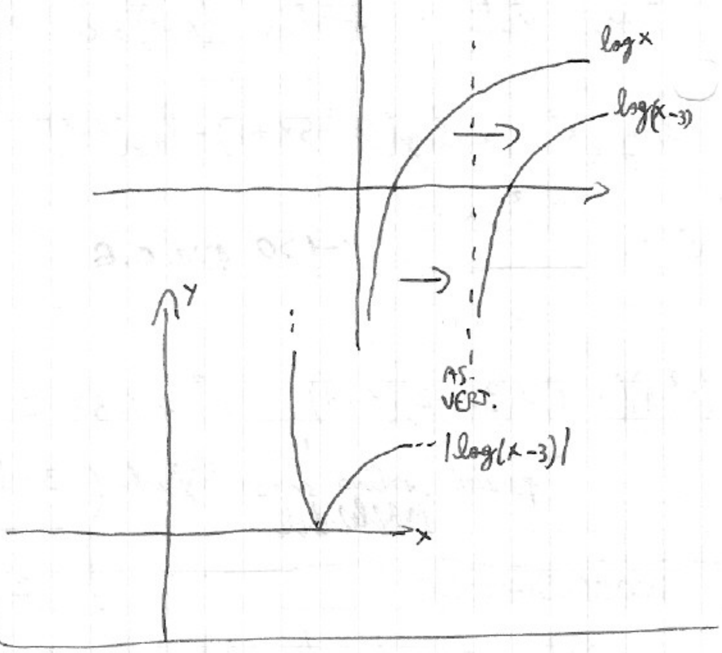
30

GRAFICO

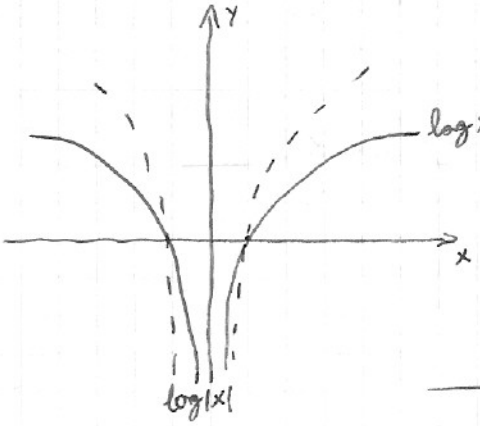
$y = 4 - 2e^x$

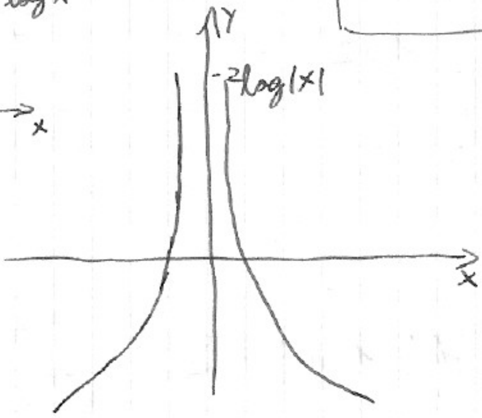


$y = |\log(x-3)|$



$y = -2\log|x|$





$y = \log(-x)$ prende $\log(x)$ e il grafico viene ribaltato rispetto a y

speculare rispetto all'asse y

$3^{x+1} - 3^{x-2} + 3^x \geq 35 \qquad 3^x\left(3 - 3^{-2} + 1\right) \geq 35 \qquad 3^x\left(\frac{27-1+9}{9}\right) \geq 35 \qquad 3^x\left(\frac{35}{9}\right) \geq 35$

$3^x \geq \cancel{35} \cdot \frac{9}{\cancel{35}} \qquad 3^x \geq 3^2 \qquad x \geq 2$

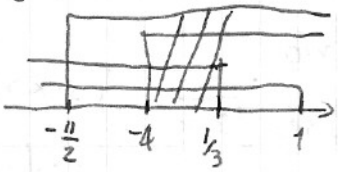
$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{19}{6} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1\right) > \frac{19}{6} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{4+9+6}{6}\right) > \frac{19}{6}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \qquad x < 0$

BASE < 1
CAMBIA IL VERSO DELLA DISUGUAGLIANZA

$\log(2x+11) - \log(x+4) - \log 2 > \log(1-3x) - \log(1-x)$

C.E. $\begin{cases} 2x+11>0 & x>-\frac{11}{2} \\ x+4>0 & x>-4 \\ 1-3x>0 & x<\frac{1}{3} \\ 1-x>0 & x<1 \end{cases} \quad -4<x<\frac{1}{3}$



$\log\frac{2x+11}{x+4} - \log 2 > \log\frac{1-3x}{1-x}$

$\log\frac{2x+11}{2x+8} > \log\frac{1-3x}{1-x} \qquad \frac{2x+11}{2x+8} > \frac{1-3x}{1-x}$

$$\frac{2x+11-2x^2-11x-\cancel{2x}-8+6x^2+24x}{(2x+8)(1-x)}>0 \qquad \frac{4x^2+13x+3}{(2x+8)(1-x)}>0$$

$N>0$ $\quad 4x^2+13x+3>0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169-48}}{8}=\frac{-13\pm 11}{8}=\begin{cases}-3\\ -\frac{1}{4}\end{cases}$$

$x<-3 \cup x>-\frac{1}{4}$

$D>0$ $\quad (2x+8)(1-x)>0 \quad x=-4$

SEMPRE POSITIVO PER C.E. $\quad x=1 \quad -4<x<1$

		-3		$-\frac{1}{4}$	
N	+		−		+
D	+		+		+
	⊕		⊖		⊕

$$\begin{cases}x<-3 \cup x>-\frac{1}{4}\\ -4<x<\frac{1}{3}\end{cases} \qquad S=\left]-4,-3\right[\cup\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$$

$\log_{\frac{4}{3}}(4x-3x^2)<0 \qquad 4x-3x^2<1 \qquad +3x^2-4x+1>0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm 1}{3}=\begin{cases}1\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

C.E.
$4x-3x^2>0$
$x(3x-4)<0$
$x=0$
$x=4/3 \qquad 0<x<\frac{4}{3}$

$x<\frac{1}{3} \;\sigma\; x>1$

$$\begin{cases}0<x<\frac{4}{3}\\ x<\frac{1}{3} \;\sigma\; x>1\end{cases} \qquad S=\left]0,\frac{1}{3}\right[\cup\left]1,\frac{4}{3}\right[$$

$\log_6(x^2-3x+2)<1$
$\log_6(x^2-3x+2)<\log_6 6$

$$\begin{cases}x^2-3x+2>0 \quad x=1 \quad x=2\\ x^2-3x+2<6 \quad x^2-3x-4=0 \quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}4\\ -1\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<1 \;\sigma\; x>2\\ -1<x<4\end{cases}$$

$S=\left]-1,1\right[\cup\left]2,4\right[$

$\log_{1/4}(x^2+3x+2)-\log_{1/4}(x+4)\leq\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

$$\text{C.E.}\begin{cases}x^2+3x+2>0 \quad x=-1 \quad x=-2\\ x+4>0\\ x-3>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<-2 \;\sigma\; x>-1\\ x>-4\\ x>3\end{cases}$$

C.E: $x>3$

$$\log_{\frac{1}{4}}\frac{(x+1)(x+2)}{x+4}\leq\log_{\frac{1}{4}}(x-3) \qquad \frac{(x+1)(x+2)}{x+4}\geq x-3 \qquad \frac{\cancel{x^2}+3x+2-\cancel{x^2}-4x+3x+12}{x+4}\geq 0$$

$N\geq 0 \quad 2x+14\geq 0 \quad x\geq -7$

$D>0$ $\forall x$ per C.E. $\quad x+4>0 \quad x>-4$

		-7		-4	
N	−		+		+
D	−		−		+
	⊕		⊖		⊕

$$\begin{cases}x>3\\ x\leq -7 \;\sigma\; x>-4\end{cases} \qquad S=\left]3,+\infty\right[$$

(31)

$x \in [0, 2\pi]$ $\quad \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

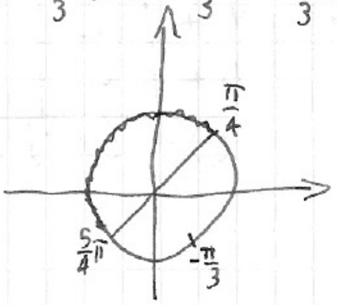
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$

$\alpha = x - \frac{\pi}{3}$

$0 \le x \le 2\pi \quad 0 - \frac{\pi}{3} \le x - \frac{\pi}{3} \le 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad -\frac{\pi}{3} \le \alpha \le \frac{5}{3}\pi$

$\operatorname{sen}\alpha > \cos\alpha$



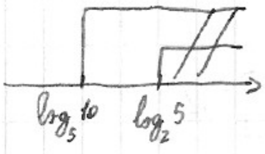
$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5}{4}\pi \quad \frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{4}\pi$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{3} \quad \frac{7}{12}\pi < x < \frac{19}{12}\pi$

$f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \ge 2 \\ 4-3x & \text{se } x < 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x > 4 \\ \cos 2x & \text{se } x \le 4 \end{cases}$

$$g(f(x)) = g \circ f = \begin{cases} \operatorname{sen}(x-4) & \text{se } \begin{cases} x-4>4 \\ x \ge 2 \end{cases} \\ \cos 2(x-4) & \text{se } \begin{cases} x-4 \le 4 \\ x \ge 2 \end{cases} \\ \operatorname{sen}(4-3x) & \text{se } \begin{cases} 4-3x>4 \\ x<2 \end{cases} \\ \cos 2(4-3x) & \text{se } \begin{cases} 4-3x \le 4 \\ x<2 \end{cases} \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sen}(x-4) & \text{se } x>8 \\ \cos(2x-8) & \text{se } 2 \le x \le 8 \\ \operatorname{sen}(4-3x) & \text{se } x<0 \\ \cos(8-6x) & \text{se } 0 \le x < 2 \end{cases}$$

$\begin{cases} 5^x > 10 \\ 2^x > 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \log_5 10 \\ x > \log_2 5 \end{cases}$



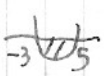
$x > \log_2 5$

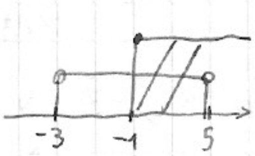
$-2\sqrt{x+4} < -x-1 \quad \sqrt{x+4} > \dfrac{x+1}{2}$

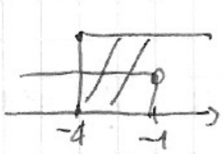
$\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ x+4 > \dfrac{(x+1)^2}{4} \end{cases}$ o $\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -4 \\ x \ge -1 \\ 4x+16-x^2-2x-1 > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x \ge -4 \\ x < -1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x \ge -1 \\ -3 < x < 5 \end{cases} \cup \begin{cases} x \ge -4 \\ x < -1 \end{cases}$

$x^2 - 2x - 15 < 0 \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+15}}{1} = 1 \pm 4 = \begin{cases} -3 \\ 5 \end{cases}$







$-1 \le x < 5$ o $-4 \le x < -1$

$S = [-4, 5[$

Determinare per quale valore reale di k la parabola $y=2x^2+x+k$ è tangente alla retta $x-y-3=0$ e trovare le coordinate del punto di contatto.

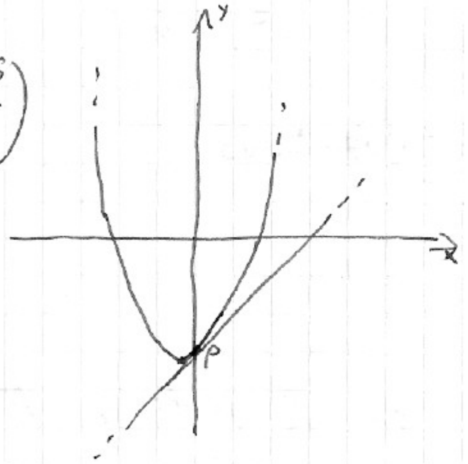
$$\begin{cases} y=2x^2+x+k \\ y=x-3 \end{cases} \quad 2x^2+\cancel{x}+k=\cancel{x}-3 \quad 2x^2+k+3=0 \quad \Delta=0 \quad 0-8(k+3)=0$$

$$k+3=0 \quad k=-3$$

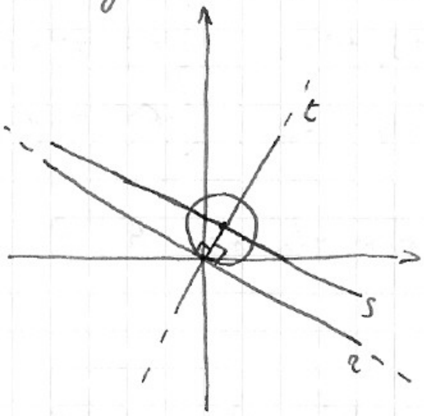
retta e parabola passano per $(0,-3)$ dato il termine noto. In più, so che sono tangenti per cui hanno un solo punto in comune, cioè $(0,-3)$.

$$\begin{cases} y=2x^2+x-3 \\ y=x-3 \end{cases} \quad 2x^2+x-3=x-3 \quad 2x^2=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad P(0,-3)$$

$$V\left(-\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$



Scrivere l'eq. della cfr passante per l'origine ivi tg a $2x+3y=0$ e avente il centro sulla retta $x+2y-2=0$



r) $y=-\frac{2}{3}x$ s) $y=1-\frac{1}{2}x$

$m_r=-\frac{2}{3}$ trovo la $\perp$ a r passante per $O(0,0)$

$m_t=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}=3/2$

$y-0=\frac{3}{2}(x-0)$ t) $y=\frac{3}{2}x$

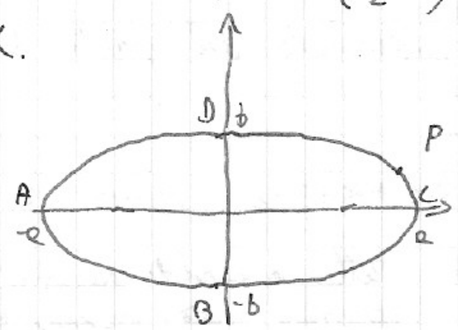
$$C \begin{cases} \text{t)}\ y=\frac{3}{2}x \\ \text{s)}\ y=1-\frac{1}{2}x \end{cases} \quad 1-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x \quad x=\frac{1}{2} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases} \quad C\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$$

$$\overline{OC}=\sqrt{\left(0-\frac{3}{4}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{4}=r$$

equazione cfr $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{13}{16}$$

Equazione ellisse passante per $P\left(\frac{9}{2},1\right)$, con l'asse minore di 4 e con i fuochi sull'asse X.



$\overline{BD}=4 \quad b=2 \quad -b=-2$

ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ trovo a imponendo il passaggio per $P\left(\frac{9}{2},1\right)$ $\quad \frac{\frac{81}{4}}{a^2}+\frac{1}{4}=1$

$\frac{81}{4}=\frac{3}{4}a^2 \quad 81=3a^2 \quad a^2=27 \quad a=\pm\sqrt{27}=\pm3\sqrt{3}$

equazione: $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{4}=1$

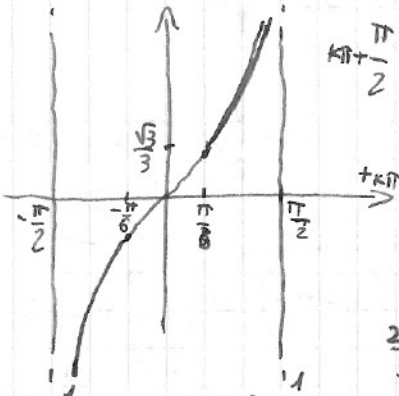
equazione retta passante per $A(1,2)$ e per il punto di intersezione tra le rette $x+3y+1=0$ e $2x-y-5=0$

$\begin{cases} x+3y+1=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3y-1 \\ -6y-2-y-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3y-1 \\ -7y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} \quad P(2,-1)$

retta passante per A e P $\quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \frac{y-2}{-1-2}=\frac{x-1}{2-1}$

$y-2=-3(x-1) \quad y=-3x+5$

$|tg\,x|>\frac{\sqrt{3}}{3} \quad tg\,x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $tg\,x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$



$k\pi+\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}+k\pi$

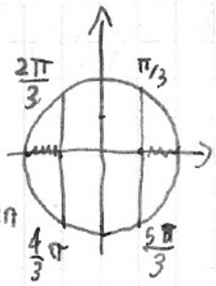
o

$+k\pi-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{6}+k\pi$

$\frac{4\cos^2x-1}{\cos x}<0 \qquad 0\leq x\leq 2\pi$

$N>0 \quad 4\cos^2x-1>0 \quad \cos^2x>\frac{1}{4} \quad \cos x<-\frac{1}{2}$ o $\cos x>\frac{1}{2}$

$D>0 \quad \cos x>0 \quad 0\leq x<\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi<x\leq2\pi \quad 0\leq x<\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$ o $\frac{5}{3}\pi<x\leq2\pi$



	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
N	+	−	−	+	−	−	+
D	+	+	−	−	−	+	+

$0 \quad \pi/3 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{4\pi}{3} \quad \frac{3}{2}\pi \quad \frac{5\pi}{3} \quad 2\pi \quad x$

$S=\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right[\cup\left]\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{3}\pi\right[$